Lista 1 de Exercícios - MAT236 - Funções Diferenciáveis e Séries - IME
Primeiro semestre de 2022
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1-8. Resolver os oito exercícios ímpares 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 e 15, da seção 12.2, *Derivação de Funções Definidas Implicitamente. Teorema Das Funções Implícitas* no Capítulo 12 de *Um Curso de Cálculo*, **Vol 2, 5ª ed.**, de H. L. Guidorizzi, pp. 226-244.

Resolva os exercícios abaixo.

9. **Raiz quadrada.** Sejam a e b dois números reais dados. Determine os pares (x, y) de números reais que resolvem o sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2y = b. \end{cases}$$

[Note que é pedido para provar que o número complexo $z = x + iy$ é solução da equação polinomial de ordem dois $z^2 = a + ib$, com i a unidade imaginária.]

10. Seja f uma função a valores reais e contínua definida no intervalo aberto (a, b).

(a) f é inversível se e só se f é estritamente crescente ou estritamente decrescente.

(b) Se f é inversível, então a imagem de f é um intervalo aberto (c, d).

11. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável.

- Se f é estritamente crescente então temos $f'(x) \geq 0$, para todo x em $\mathbb{R}$. A recíproca é verdadeira? Prove ou dê um contra-exemplo.

12. **Teorema do Valor Intermediário para Derivadas (Propriedade de Darboux)**: *Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável, então a imagem de f' é um intervalo.*

13. **(Regra da Cadeia na reta real)**. Sejam $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável em x_0 e $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável em $y_0 = y(x_0)$. Então, a composta $z \circ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável em x_0 e

$$(z \circ y)'(x_0) = z'(y_0)y'(x_0).$$

VIDE VERSO

Definição. Seja $L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ o espaço (vetorial) das funções lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$.

14. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma aplicação linear. Mostre que existe um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$T(x) = \langle x, v \rangle \,, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

15. **(Diferenciabilidade).** Dada $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e um ponto p em $\mathbb{R}^n$, são equivalentes:

(1) Existem T em $L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ e uma função vetorial $e : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tais que

$$F(p+h) = F(p) + T(h) + e(h), \text{ para todo } h \in \mathbb{R}^n, \text{ com } \lim_{h\to 0} \frac{e(h)}{|h|} = 0.$$

(2) Existe uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(p+h) - F(p) - T(h)}{|h|} = 0.$$

(3) Existem T em $L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ e uma função vetorial $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tais que

$$F(p+h) = F(p) + T(h) + R(h)|h|, \text{ com } R(0) = 0 \text{ e } \lim_{h\to 0} R(h) = 0.$$

16. Dada $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, prove que F é diferenciável em um ponto p se e somente se

- Existem um vetor v em $\mathbb{R}^n$ e uma função vetorial $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tais que

$$F(p+h) = F(p) + \langle v, h \rangle + \langle E(h), h \rangle \,, \text{ com } E(0) = 0 \text{ e } \lim_{h\to 0} E(h) = 0.$$

17. Seja $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ contínua e positiva, com $f(x) \to +\infty$ se $|x| \to +\infty$. Então, f assume um valor mínimo absoluto.