MAT 226 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS I
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Segundo semestre de 2022

LISTA 7 DE EXERCÍCIOS

NÃO PRECISA FAZER OS EXERCÍCIOS: 3, 7, 9, 13, 14, 16 e 20.
DICA PARA A P3: estude exemplos na apostila "Teoria Qualitativa".
VIDE DICAS para os exercícios 10 e 22.

Exercícios extraídos de D. G. Figueiredo e A. F. Neves, *Equações Diferenciais Aplicadas*, IMPA, 2008, pp. 242–244 e pp. 298–301.

1. Localize e classifique os pontos de equilíbrio dos seguintes sistemas. Esboce o plano de fase em torno dos pontos de equilíbrio.

$$(a)\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = x - y. \end{cases} \qquad (d)\begin{cases} x' = -y \\ y' = 2x - 4y. \end{cases}$$

$$(b)\begin{cases} x' = -4x + 2y \\ y' = 3x - 2y. \end{cases} \qquad (e)\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y - 2xy. \end{cases}$$

$$(c)\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = x + y. \end{cases} \qquad (f)\begin{cases} x' = ye^y \\ y' = 1 - x^2. \end{cases}$$

2. Ache uma integral primeira para o sistema (a) acima. Isto é, determine uma função $V(x,y)$ tal que as soluções do sistema (a) "moram" nas curvas de níveis de V [logo, $V(x(t),y(t)) = c$ para todo t].
Dica. Procure V da forma $V(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$.

"3" *(Não precisa estudar para a P3.)* Transforme a equação do oscilador harmônico

$$mx'' + \mu x' + kx = 0$$

num sistema no plano de fases (x,y) e estude os tipos de singularidade que ocorrem, conectando-as com as noções de amortecimento forte, crítico e oscilatório.

4. Consideremos o sistema “sela do macaco”

$$\begin{cases} x' = 2xy \\ y' = x^2 - y^2. \end{cases}$$

Mostre que $V(x,y) = x^3 - 3xy^2$ é uma integral primeira para o sistema e esboce o plano de fase em torno da origem.

5. Compare os planos de fase dos sistemas

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x' = xy \\ y' = -x^2 \end{cases}$$

Em ambos temos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

6. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ambas de classe C^1, com produto interno

$$\langle f(x), g(x) \rangle = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^2$$

e tais que $x' = f(x)$ tem uma órbita fechada. Mostre que g tem um zero.

“7” *(Não precisa estudar para a P3.)* Mostre que as equações abaixo têm solução periódica.

(a) $u'' - (1 - u^2)u' + u^5 = 0$.

(b) $u'' + (u^2 - 2)u' + u + \sin u = 0$.

8. Mostre que o sistema abaixo tem uma solução periódica:

$$\begin{cases} x' = y + x(x^2 + y^2 - 9) \\ \\ y' = -x + y(x^2 + y^2 - 9). \end{cases}$$

[Nesse caso, pode-se resolver explicitamente o sistema e determinar essa solução. Use coordenadas polares.]

"9" *(Não precisa estudar para a P3.)* Mostre que o sistema

$$\begin{cases} x' = -y + x\frac{f(r)}{r} \\ \\ y' = x + y\frac{f(r)}{r}, \end{cases} \qquad \text{onde } r^2 = x^2 + y^2,$$

tem soluções periódicas correspondendo aos zeros de $f(r)$. Determine essas soluções nos casos abaixo e discuta a estabilidade dos ciclos

(i) $f(r) = (r-1)(r-2)(r-3)$

(ii) $f(r) = (r-4)^2(r^2 - 8r + 5)$.

10. Determine regiões onde os sistemas abaixo não têm soluções periódicas.

$$(a) \begin{cases} x' = y \\ \\ y' = x^3 + y + y^3, \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} x' = 2x - xy^4 + y^3 \\ \\ y' = x^3 + y - yx^4. \end{cases}$$

Dica. Utilize o Critério de Bendixon, Exercício 22.

VIDE VERSO

Exercícios extraídos de D. G. Figueiredo e A. F. Neves, *Equações Diferenciais Aplicadas*, IMPA, 2008, pp. 298–301.

11. Determine a solução geral do sistema $x' = Ax$ e do sistema $x' = Bx$, onde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Sejam A e B como no exercício 11 .Resolva os seguintes itens.

    (a) Compute e^{tA} e e^{tB}.

    (b) Esboce as soluções de $x' = Ax$ no plano (com a base canônica usual).

    (c) Mostre que é falsa a desigualdade

$$|e^{tA}x| \le |x| \text{ para quaisquer } t \ge 0 \text{ e } x \in \mathbb{R}^2.$$

"13" *(Não precisa estudar para a P3.)* Usando a fórmula de variação das constantes, escreva a expressão que fornece as soluções da equação

$$x'' + x = h(t).$$

"14" *(Não precisa estudar para a P3.)* Considere os sistemas lineares n dimensionais (S1) e (S2) dados por

$$(S1)\ x' = A(t)x \qquad \text{e} \qquad (S2)\ y' = A(t)y + h(t),$$

com $A(t)$ e $h(t)$ contínuas e periódicas de período p. Mostre o que se pede.

(a) Se $\lambda = 1$ for autovalor da matriz principal $X(p)$ do sistema (S1) avaliada no ponto p, então (S1) tem solução p-periódica não nula.

(b) Se $\lambda = 1$ não for autovalor da matriz principal $Y(p)$ do sistema (S2) avaliada no ponto p, então (S2) tem solução p-periódica.

Dica. Denote por $y(t, t_0)$ a solução de (S2) com condição inicial $y(0, y_0) = y_0$. Use "variação das constantes" e mostre que existe y_0 tal que $y(p, y_0) = 0$.

15. Seja A uma matriz tal que todo autovalor λ tem parte real negativa.

 (a) Mostre que a integral

$$\int_0^{+\infty} \left(e^{sA}\right)^T e^{sA}\, ds$$

 converge, onde X^T indica a matriz transposta de uma matriz X.

 (b) Dada

$$C = \int_0^{+\infty} \left(e^{sA}\right)^T e^{sA}\, ds,$$

 mostre que

$$CA + A^T C = -I.$$

 Dica. Integre os dois lados de

$$\frac{d}{ds}\left\{\left(e^{sA}\right)^T e^{sA}\right\} = \left(e^{sA}\right)^T e^{sA} A + A^T \left(e^{sA}\right)^T e^{sA}, \text{ para } s \in [0, +\infty).$$

 (c) Seja C a matriz em (b). Defina $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$V(x) = \langle Cx, x\rangle \text{ (produto interno usual).}$$

 Mostre as propriedades abaixo.

 (c1) A função V é definida positiva. Isto é,

$$V(0) = 0 \quad \text{e} \quad V(x) > 0 \text{ para todo } x \neq 0.$$

 Dica. Vale a identidade $\langle A^T x, x\rangle = \langle x, Ax\rangle$.

 (c2) Se $x(t)$ é não nula e satisfaz $x' = Ax$, então temos

$$\frac{d}{dt}\{V(x(t))\} < 0 \text{ para todo } t.$$

"16" *(Não precisa estudar para a P3.)* Considere as equações (duas equações) do modelo presa-predador

$$(MPP) \quad \begin{cases} x' = (a - by)x, \text{ com constantes } a > 0 \text{ e } b > 0 \\ \text{e} \\ y' = (-c + dx)y, \text{ com constantes } c > 0 \text{ e } d > 0. \end{cases}$$

Ache uma função de Liapunov para (MPP), em torno do ponto de equilíbrio

$$\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right).$$

Dica. Procure V da forma $V(x, y) = F(x) + G(y)$.

17. Esboce o plano de fase da equação

$$x'' + (x^2 + y^2 - 1)x' + x = 0.$$

chamando a atenção para os pontos de equilíbrio, soluções periódicas, orientação das soluções, conjuntos α e ω-limites, estabilidade e instabilidade, etc. Todas as conclusões que você puder, não esqueça de justificá-las.

18. Seja $x' = -xf(x)$, onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 e $f(0) > 0$.

    (a) Verifique que $V(x) = |x|^2$ é uma função de Liapunov

    (b) Analise a estabilidade do ponto de equilíbrio $x = 0$.

19. Considere o sistema

$$x' = f(x),$$

onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um campo gradiente. Isto é, existe uma função $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que

$$f(x) = -\nabla V(x) = -\operatorname{grad} V(x).$$

Mostre as afirmações abaixo.

   (a) $V' = -|\nabla V(x)|^2$, com a usual notação

$$V' = \frac{d}{dt}\left\{V\big(x(t)\big)\right\}.$$

   (b) Se $\overline{x}$ é um ponto de mínimo isolado de V, então $\overline{x}$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável da equação $x' = f(x)$.

   (c) Se x é um ponto ω-limite [isto é, $x \in \omega(x_0)$], então x é um ponto de equilíbrio.

Outros exercícios (não em “Equações Diferenciais Aplicadas” de D. J. Fiqueiredo e A. F. Neves)

“20” *(Não precisa estudar para a P3.)* Seja X um campo vetorial de classe C^1 num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que, se $\phi : (\omega_-, \omega_+) \to \Omega$ for uma curva integral maximal de X e se existir

$$\lim_{t \to \omega_+} \phi(t) = p \in \Omega,$$

então $\omega_+ = +\infty$ e p é uma singularidade (i.e. um ponto de equilíbrio) de X.

21. Seja $X = -\nabla V$, com $V : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2 num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

    (a) Prove que X não possui órbitas periódicas.
    Dica. Se $\phi(t)$ é uma curva integral regular de X, então

    $$\frac{d}{dt}\{V \circ \phi)\}(t) < 0 \quad [\text{i.e., } V \circ \phi \text{ é estritamente decrescente.}]$$

    (b) Suponha que para todo $c \in \mathbb{R}$ o conjunto $V^{-1}(-\infty, c]$ é compacto e que as singularidades de ∇V são isoladas. Mostre as afirmações abaixo.

    (b1) Para todo p em Ω, a curva integral maximal de $x' = -\nabla V(x)$ que se inicia em p e é indicada $\gamma_p : J(p) \to \Omega$, está definida em $[0, +\infty)$.

    (b2) Existe o limite
    $$\lim_{t \to +\infty} \gamma_p(t).$$

    (b3) O limite em (b2) é uma singularidade de ∇V.

22. **Critério de Bendixon.** Seja $X = (X_1, X_2)$ um campo de classe C^1 em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ simplesmente conexo. Suponha que

$$\mathrm{div} X = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \neq 0$$

em todos os pontos de Ω. Então X não tem órbitas periódicas em Ω.
Dica. Suponha que γ seja uma órbita periódica. Aplique o teorema da divergência ao conjunto limitado por γ^*. Aplique-o no formato

$$\iint\limits_K \mathrm{div} X \, dx \, dy = \int\limits_C -X_2 dx + X_1 dy,$$

onde C é uma curva de classe ^{1} e é a fronteira positivamente orientada da região compacta K. Escolha K e C úteis para provar o Critério de Bendixon.

Aplique o Critério de Bendixon no Exercício 10.

23. Esboce o retrato de fase do pêndulo simples.

24. Encontre a hamiltoniana H do sistema

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -x^3 + 4x \end{cases}$$

e esboce o retrato de fase correspondente.

25. Esboce os retratos de fase dos fluxos gradientes $z' = -\nabla V(z)$, onde $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, nos casos abaixo. Identifique os pontos de equilíbrio e classifique-os quanto à estabilidade. Esboce também as superfícies de nível de V.

    (a) $V(x, y) = x^2 + 4y^2$.

    (b) $V(x, y) = 2x^2 - 2xy + 5y^2 + 4x + 4y + 4$.

    (c) $V(x, y) = x \sin y$.

26. Encontre uma função de Liapunov estrita para o equilíbrio $(0, 0)$ do sistema

$$\begin{cases} x' &= -2x - y^2 \\ y' &= -y - x^2. \end{cases}$$