

MAT 226 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS I

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Segundo semestre de 2022

LISTA 6 DE EXERCÍCIOS

Notações. Fixemos a base usual em \mathbb{R}^n . Seja I a identidade em $M_n(\mathbb{R})$. Abreviamos linearmente independente por LI e linearmente dependente por LD.

E1. **Resolvente.** Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$, consideremos o problema

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

(a) Mostre que a matriz fundamental principal de soluções é $e^{(t-t_0)A}$.

(b) Chamamos de **resolvente** para o problema dado acima a uma função $R: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ que satisfaz as condições

$$\begin{cases} R(t, t_0) \text{ é uma matriz fundamental de soluções, para cada } t_0 \text{ fixado,} \\ R(t_0, t_0) = I \text{ para todo } t_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Mostre que, no problema em questão, o resolvente é

$$R(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}.$$

E2. **Resolvente (coeficientes não constantes).** Consideremos o problema

$$\begin{cases} x' = A(t)x, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{para } x: J \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

onde J é um intervalo aberto e $A: J \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ é contínua e satisfaz

$$A(s)A(t) = A(t)A(s), \text{ para quaisquer instantes } s \text{ e } t.$$

Mostre que a resolvente $R: J \times J \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ [ver definição acima] é

$$R(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(s) ds\right).$$

Mostre que, fixado t_0 , a função $R(\cdot, t_0): J \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ é a única solução de

$$\begin{cases} X' = A(t)X, \text{ para } X: J \rightarrow M_n(\mathbb{R}), \\ X(t_0) = I. \end{cases}$$

[Destaquemos que tal problema fornece uma caracterização do resolvente.]

Dica. Mostre primeiro que a matriz $\int_{t_0}^t A(s) ds$ comuta com a matriz $A(t)$.

E3. **Resolvente e matriz fundamental.** Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e uma função $A : J \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ contínua.

Denote por $R(t, t_0)$ a resolvente da equação

$$x' = A(t)x, \text{ para } x : J \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Isto é, para cada instante $t_0 \in J$, a função $t \mapsto R(t, t_0)$ é a única solução do problema matricial (com valor inicial)

$$\begin{cases} X' = A(t)X, \\ X(t_0) = I \end{cases} \text{ para } X : J \rightarrow M_n(\mathbb{R}).$$

Dadas x_1, \dots, x_n soluções da equação homogênea $x' = A(t)x$, denote por

$$X = X(t) = [x_1, \dots, x_n] \in M_n(\mathbb{R})$$

a função matricial cuja j -ésima coluna é a matriz das coordenadas de x_j . Verifique o que segue.

(a) A identidade

$$X(t) = R(t, t_0)X(t_0).$$

(b) Temos $\det X(t) = 0$ em todo ponto ou $\det X(t) \neq 0$ em todo ponto.

O conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$ é LD no primeiro caso e é LI no segundo.

(c) Se $\{x_1, \dots, x_n\}$ é LI, diz-se que X é uma *matriz fundamental* para a equação homogênea considerada.

Se X for uma matriz fundamental e $C \in M_n(\mathbb{R})$ é inversível, então

$$X(t)C$$

é matriz fundamental. Ainda, toda matriz fundamental é dessa forma.

(d) Se $X : J \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ é uma matriz fundamental, a resolvente é

$$R(t, t_0) = X(t)X(t_0)^{-1}.$$

E4. **Equação escalar, coeficientes não constantes e linear.** Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo e n funções contínuas $b, a_0, \dots, a_{n-1} : J \rightarrow \mathbb{R}$. Estudemos a edo

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x = b(t).$$

Definamos o sistema linear de primeira ordem

$$X' = A(t)X + B(t), \text{ para } X : I \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

onde $A(t)$ [dita matriz companheira à edo escalar] e $B(t)$ são dados por

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \dots & -a_{n-1}(t) & \dots \end{pmatrix} \text{ e } B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Verifique as afirmações abaixo.

(i) A função real $x : J \rightarrow \mathbb{R}$ é solução da edo escalar se e só se o caminho

$$X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix} \text{ é solução do sistema } X' = A(t)X + B(t).$$

Ainda, toda solução do sistema $X' = A(t)X + B(t)$ é dessa forma.

(ii) Dado $t_0 \in J$, a resolvente do sistema homogêneo $X' = A(t)X$ é a matriz

$$R(t, t_0) = [R_1(t, t_0), \dots, R_n(t, t_0)]$$

cuja j -ésima coluna é dada por

$$R_j(t, t_0) = \begin{pmatrix} r_j(t, t_0) \\ r_j'(t, t_0) \\ \vdots \\ r_j^{(n-1)}(t, t_0) \end{pmatrix},$$

com $r_j(t, t_0)$ a solução da edo homogênea (usemos o delta de Kronecker)

$$\begin{cases} x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x = 0 \\ \text{com condição inicial } r_j^{(k)}(t_0, t_0) = \delta_{k,j-1}, \text{ para } 0 \leq k \leq n-1. \end{cases}$$

- (iii) **Fórmula de Abel-Liouville e equações escalares.** Sejam x_1, \dots, x_n soluções da edo escalar homogênea $x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x = 0$. Para cada $j = 1, \dots, n$ definamos a matriz $X(t) = [X_1, \dots, X_n]$ com

$$j\text{-ésima coluna } X_j = \begin{pmatrix} x_j \\ x'_j \\ \vdots \\ x_j^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Temos $X(t) = R(t, t_0)X(t_0)$, para todos $t \in J$ e $t_0 \in J$.

O também chamado **determinante wronskiano**

$$W = W[x_1, \dots, x_n] = \det \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x'_1 & \cdots & x'_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad [\text{note-se } W = \det X]$$

é dado pela fórmula de Abel-Liouville

$$W(t) = \exp \left(- \int_{t_0}^t a_{n-1}(s) ds \right) W(t_0).$$

O determinante W é a função nula (caso em que y_1, \dots, y_n são LD) ou não se anula em ponto algum (caso em que y_1, \dots, y_n são LI).

- (iv) **Resolvente e variação das constantes.** Com a notação do itens anteriores, use a fórmula da variação das constantes para concluir que a solução da equação escalar não homogênea

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x = b(t)$$

com condição inicial $(x(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)) = (0, \dots, 0)$ é dada por

$$x(t) = \int_{t_0}^t r_n(t, s)b(s) ds.$$

Conclua a partir da questão anterior que, se $n = 2$ e x_1, x_2 forem duas soluções linearmente independentes da homogênea

$$x'' + a_1'(t)x' + a_0(t)x = 0,$$

então

$$x(t) = \int_{t_0}^t b(s) \frac{x_2(t)x_1(s) - x_1(t)x_2(s)}{W(x_1, x_2)(s)} ds.$$

Atenção. Dadas quaisquer n funções escalares $y_1 : J \rightarrow \mathbb{R}, \dots, y_n : J \rightarrow \mathbb{R}$ em $C^{(n-1)}$, com $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo, é também dito **wronskiano** o determinante

$$W[y_1, \dots, y_n] = \det \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

1. Se $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e limitada, então toda solução da edo

$$y'' + 5y' + 4y = f$$

é limitada. Dica. Dê a solução geral, via fórmula da variação das constantes.

2. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que todos os autovalores de A estejam no semiplano $\text{Re}(z) < 0$. Suponha que $f : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ seja contínua e limitada. Mostre todas as soluções de $x' = Ax + f(t)$ são limitadas.

Solução. Suponhamos $t_0 = 0$ e consideremos a variável $t \in [0, +\infty)$.

- ◇ Seja $p_A(z) = (z - \lambda_1)^{m_1} \dots (z - \lambda_m)^{m_m}$ a fatoração de p_A (graças ao TFA).
Seja M uma constante majorando $|f|$.
- ◇ Fixado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, por Duhamel a solução por x_0 é dada por

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}f(s) ds.$$

A fórmula (explícita) para e^{tA} garante

$$e^{tA} = \sum c_{jk_j} p_{jk_j}(A), \text{ onde } \begin{cases} c_{jk_j} = \frac{1}{(m_j - k_j)!} \left\{ \frac{e^{tz}(z - \lambda_j)^{m_j}}{p_A(z)} \right\}^{(m_j - k_j)} \Big|_{z = \lambda_j} \\ p_{jk_j} = \frac{p_A(z)}{(z - \lambda_j)^{k_j}}. \end{cases}$$

É trivial ver que temos (cheque)

$$c_{jk_j} = d_{jk_j} e^{\lambda_j t} \text{ para alguma constante } d_{jk_j}.$$

- ◇ Seja $\sigma > 0$ com cada $\text{Re}(\lambda_j) \leq -\sigma$. Donde $|e^{\lambda_j t}| = e^{t\text{Re}(\lambda_j)} \leq e^{-\sigma t}$. Segue

$$e^{tA} = \sum e^{\lambda_j t} d_{jk_j} p_{jk_j}(A) \text{ e } |e^{tA}| \leq C e^{-\sigma t} \text{ para algum } C > 0.$$

- ◇ **Conclusão.** Encontramos então

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq C e^{-\sigma t} |x_0| + \int_0^t e^{-\sigma(t-s)} C M ds \\ &= C |x_0| + M \frac{e^{-\sigma(t-s)}}{\sigma} \Big|_{s=0}^{s=t} \\ &= C |x_0| + M \frac{1 - e^{-\sigma t}}{\sigma} \\ &\leq C |x_0| + \frac{M}{\sigma}. \end{aligned}$$

O caso $t_0 = 0$ está provado.

Complete a prova ♣

3. Resolva, explicitando o domínio da solução maximal, o problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + y = \sec x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

4. Seja $L : \{y \in C^2([0, 2\pi]) \mid y'(0) = y'(2\pi) = 0\} \rightarrow C^0([0, 2\pi])$ o operador linear definido por

$$L(y) = y'' + y.$$

(a) Mostre que o núcleo de L é gerado por $\cos x$.

(b) Mostre que $f \in C^0([0, 2\pi])$ pertence à imagem de L se e somente se

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos t \, dt = 0.$$

5. Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo com $0 \in J$ e $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ contínua.

- (a) Aplique o método da variação dos parâmetros à equação $x'' - x = f(t)$, partindo-se das soluções $\phi_1(t) = \cosh t$ e $\phi_2(t) = \sinh t$ da equação homogênea associada. Conclua que a solução geral da referida equação pode ser descrita por

$$c_1 \cosh t + c_2 \sinh t + \int_0^t \sinh(t-s)f(s) ds,$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

- (b) Mostre que está bem definido e é inversível o operador linear

$$L : \{x \in C^2([0, 1]) \text{ tal que } x(0) = x(1), x'(0) = x'(1)\} \longrightarrow C^0([0, 1])$$

definido por $L(y) = y'' - y$.

6. Para cada uma das equações abaixo, é dada uma solução ϕ_1 . Encontre uma solução ϕ_2 , linearmente independente de ϕ_1 , no intervalo indicado.

Dica. Use a fórmula de Abel-Liouville

- (a) $x'' - 4tx' + (4t^2 - 2)x = 0$, $\phi_1(t) = e^{t^2}$, na reta \mathbb{R} .

- (b) $(1 - t^2)x'' - 2tx' + 2x = 0$, $\phi_1(t) = t$, no intervalo $(0, 1)$.

- (c) $tx'' - (t + 1)x' + x = 0$, $\phi_1(t) = e^t$, no semieixo [ou semirreta] $(0, +\infty)$.

7. **Método de Putzer.** Expresse e^{tA} como um polinômio em A .

$$(a) A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(c) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}$$

$$(d) A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(e) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(f) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Ache e^{tA} (em forma fechada) para cada uma das matrizes no exercício 7.
9. Para cada item no exercício 7, resolva o respectivo sistema $X' = AX$ com a condição inicial dada abaixo.

$$(a) \quad X(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \qquad (b) \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(c) \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (d) \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$(e) \quad X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (f) \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

10. Resolva o sistema linear $X' = AX + B(t)$ com a condição inicial dada.

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2e^t \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \quad A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} e \\ e^{2t} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

$$(c) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

11. Encontre e^{tA} para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Resolva $x' = Ax$, com $x(0) = (1, 2, 3, 4)^T$ [matriz transposta de $(1, 2, 3, 4)$].

12. Seja $A : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ de classe C^∞ . Verifique as afirmações.

(a) Existe um $c > 0$ tal que temos $|A(h) - A(0)| \leq c|h|$ para todo $|h| \leq 1$.

Dica. TFC ou o TVM, em cada coordenada (total n^2).

(b) $A(0) = 0 \implies \frac{d}{dt} e^{A(t)} = A'(0)$.

Dicas. Escreva o somatório para $e^{A(t)}$ e então compute a derivada.

13. Sejam A e B matrizes em $M_n(\mathbb{R})$ e t a variável real. Mostre que

$$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB} \text{ (para todo } t) \implies AB = BA.$$

Dica. Derive.

14. Seja $A : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ de classe C^∞ e satisfazendo a identidade

$$A(t)A(s) = A(s)A(t) \text{ para quaisquer } t \text{ e } s.$$

Mostre

$$\frac{d}{dt} e^{A(t)} = A'(t)e^{A(t)} = e^{A(t)}A'(t).$$

Dicas (escolha uma).

(1) Verifique que a identidade $A(t)A(s) = A(s)A(t)$ garante a fórmula

$$\frac{d}{dt} e^{A(t)} = \frac{d}{ds} \left\{ e^{A(s)-A(t)} e^{A(t)} \right\} \Big|_{s=t}.$$

Então, aplique 12 (b).

(2) Escreva o somatório para e^{tA} . Aplique 12(a) e estime

$$\frac{e^{A(t+h)} - e^{A(t)}}{h} - A'(t)e^{A(t)}.$$