

MAT 226 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS I
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Segundo semestre de 2022

LISTA 5 DE EXERCÍCIOS

Notações. Abreviamos linearmente independente por LI.

Fixemos a base canônica e_1, \dots, e_n de \mathbb{R}^n , para cada $n = 1, 2, \dots$

Denotamos I , a matriz identidade em $I \in M_n(\mathbb{R})$.

E1. Sejam A, B e C matrizes em $M_n(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$. Mostre as afirmações abaixo.

(a) Se $AC = CB$, então

$$e^{tA}C = Ce^{tB}.$$

(b) $AB = BA$, então

$$e^{tA}B = Be^{tA} \quad \text{e} \quad e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB} = e^{tB}e^{tA}.$$

E2. Seja $I \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz identidade. Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Compute as potências de A , as potências de B e as matrizes e^{tA} e e^{tB} .

Mostre que A não comuta com B e que e^{tA} não comuta com e^{tB} .

(b) Escreva $C = I + B$. Utilize que $IB = BI$, o Exercício 1 e compute e^{tC} .

E3. Seja a matriz (correspondente à reflexão em relação à bissetriz principal)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Ache os dois auto-valores reais e correspondentes auto-vetores (reais).

(b) Ache dois caminhos-soluções LI para $x' = Ax$.

(c) Seja $X(t)$ a matriz fundamental relativa às soluções em (b). Ache e^{At} .

(d) Compute e^{tA} diretamente (i.e., pela definição).

E4. Encontre o que se pede abaixo, para a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Auto-valores (complexos) e respectivos auto-vetores (complexos).
- (b) Dois caminhos-soluções complexos e LI para $z' = Az$, onde $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$.
- (c) Dois caminhos-soluções reais e LI para $x' = Ax$.
- (d) Ache e^{At} . Use $X(t)$, matriz fundamental com as soluções reais em (c).

E5. Sejam $A \in M_n(\mathbb{R})$, a identidade $I \in M_n(\mathbb{R})$ e λ um auto-valor de A . Seja $v \neq 0$ um **auto-vetor generalizado** associado a λ . Isto é, existe m tal que

$$(A - \lambda I)^m v = 0.$$

Mantidas as notações acima, verifique o que segue.

- (a) $e^{t(A-\lambda I)}v = \sum_{k < m} \frac{t^k}{k!} (A-\lambda I)^k v = v + t(A-\lambda I)v + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} (A-\lambda I)^{m-1}v.$
- (b) $e^{tA}v = e^{\lambda t} \sum_{k < m} \frac{t^k}{k!} (A-\lambda I)^k v.$
- (c) $[e^{tA}v]' = A[e^{tA}v].$

E6. Encontre o que se pede para a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Auto-valores reais (um simples e um duplo) e dois auto-vetores LI.
- (b) Dois auto-vetores generalizados LI, relativos ao auto-valor duplo.
- (c) Três caminhos-soluções reais e LI para $x' = Ax$.
- (d) Ache e^{At} . Use $X(t)$, matriz fundamental com as soluções reais em (c).

E7. Encontre o que se pede abaixo, para a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) O único auto-valor real ν (tripla multiplicidade) e auto-vetores LI.
- (b) Três auto-vetores generalizados LI.
- (c) Três caminhos-soluções reais e LI para $x' = Ax$.
- (d) Ache e^{At} . Use $X(t)$, matriz fundamental com as soluções reais em (c).
- (e) Mostre que $(A - \nu I)^3 = 0$. Isto é, $N = A - \nu I$ é **nilpotente**.
- (f) Utilize (e) e compute e^{At} diretamente.

1. Representemos \mathbb{R}^3 com coordenadas x, y e z .

- (a) Resolva o sistema linear homogêneo com coeficientes constantes

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = 6x - 11y + 6z \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- (b) Compute e^{At} , onde A é a matriz 3×3 neste enunciado.

2. Representemos \mathbb{R}^2 com coordenadas x e y .

- (a) Resolva o sistema linear homogêneo com coeficientes constantes

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - 2y \end{cases}$$

- (b) Compute e^{At} , onde $A \in M_2(\mathbb{R})$ é a matriz associada a tal sistema.

3. Resolva o problema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y + 2z \\ \frac{dy}{dt} = -y \\ \frac{dz}{dt} = -y - 2z \end{cases} \quad \text{com} \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4. Resolva o sistema

$$\begin{cases} x' = 2x - 5y \\ y' = 2x - 4y \end{cases}$$

5. Seja $X = (x, y, z)^T$ a variável em \mathbb{R}^3 .

(a) Resolva o sistema linear com condição inicial

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X \quad \text{com} \quad X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Compute e^{At} , com $A \in M_{3 \times 3}$ a matriz associada ao sistema.

6. Resolva o sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

7. Calcule e^{At} , nos seguintes casos:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{f) } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

8. Em cada um dos itens abaixo, resolva o problema de valor inicial dado

$$\text{a) } x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 10 & 2 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 13 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \dot{x} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 10 & 9 & 1 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

9. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Mostre que $A(A - 5I) = 0$.

(b) Determine e^{At} .

10. Resolva os sistemas lineares homogêneos com coeficientes constantes abaixo.

$$\text{a) } \begin{cases} x' = -y \\ y' = -4x \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x' = -3x + y \\ y' = 8x - y \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + z \\ z' = x + y \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 3x - 2y \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} x' = x - y \\ y' = y - z \\ z' = z - x \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} x' = x + 2y - z \\ y' = -y + 3z \\ z' = 2z \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} x' = ax - y \\ y' = x + ay \end{cases} \quad \text{h) } \begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -2x + 5y \end{cases} \quad \text{i) } \begin{cases} x' = x \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = 3x + 2y + z \end{cases}$$

11. Seja $X = (x, y)^T$ a variável em \mathbb{R}^2 . Resolva o sistema linear não homogêneo

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}.$$

12. Resolva o sistema linear não homogêneo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix}.$$

13. Resolva os sistemas lineares não homogêneos

$$\text{a) } \begin{cases} 4x' - y' + 3x = \sin t \\ x' + y = \cos t \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x' = x - 2y + t^2 + 2t \\ y' = 5x - y - 4t^2 + 2t \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x' = y \\ y' = 3x - 2y + 3t^2 - 4t + 2 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x' + y = \cos t \\ y' + x = \sin t \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} x' = y \\ y' = -2x + 3y + 3e^t \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\text{h) } \begin{cases} x' = 3x + 3y + e^{-t} \\ y' = -x - y + e^{2t} \end{cases}$$

$$\text{i) } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{j) } \begin{cases} x' + y' = -x + y + 3 \\ x' - y' = x + y - 3 \end{cases}$$

14. Seja $X : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ derivável e inversível para todo $t \in \mathbb{R}$. Compute

$$[X^{-1}]'(t) = \frac{d}{dt} \{X(t)^{-1}\}.$$

15. Considere a equação $x' = A(t)x$, para $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde I é um intervalo aberto e $A : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ é contínua. Deduza a fórmula para a variação dos parâmetros, procurando por uma solução do problema

$$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

na forma $x(t) = X(t)C(t)$, com $X(t)$ uma matriz fundamental e $C : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

16. Seja $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 . Suponha $\Phi(0) = I$ (identidade) e $\Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s)$ para quaisquer t e s . Prove que existe uma só matriz A tal que

$$\Phi(t) = e^{At}.$$

17. Seja $A : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ contínua e tal que

$$\left[\int_{t_0}^t A(s) ds \right] A(t) = A(t) \left[\int_{t_0}^t A(s) ds \right].$$

Prove que então

$$\Phi(t) = e^{\int_{t_0}^t A(s) ds} \text{ é solução fundamental de } x' = A(t)x.$$

Dica. Mostre que

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{t_0}^t A(s) ds \right]^m = mA(t) \left[\int_{t_0}^t A(s) ds \right]^{m-1}, \text{ onde } m = 1, 2, \dots$$

18. Sejam A e B matrizes em $M_n(\mathbb{R})$ [ou $M_n(\mathbb{C})$]. O **colchete** entre A e B é

$$[A, B] = BA - AB.$$

Suponhamos $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$. Mostre que então temos

$$e^{tB} e^{tA} = e^{t(A+B)} e^{\frac{t^2}{2}[A, B]} \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Dica. Verifique que

$$\Phi(t) = e^{-t(A+B)} e^{tB} e^{tA}$$

é solução de $X' = t[A, B]X$.

19. Seja $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto arbitrário, com $F = F(x, y)$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ contínuas. Seja K compacto em Ω . Mostre que existe uma constante $M > 0$ tal que temos

$$|F(t, x) - F(t, y)| \leq M|x - y|$$

quaisquer que sejam os pares (t, x) e (t, y) , com mesma abscissa, em K .