MAT 226 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS I
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Segundo semestre de 2022

LISTA 4 DE EXERCÍCIOS

1. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo não-degenerado, uma função $g : I \to \mathbb{R}$ contínua e $F : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $F(t,x) = g(t)|x|$. Mostre que para todo ponto $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$ existe uma única solução $\phi : I \to \mathbb{R}$ do problema de Cauchy

$$x' = F(t,x) \text{ com } x(t_0) = x_0.$$

2. Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F(x,y) = 2\sqrt{|y|}$.

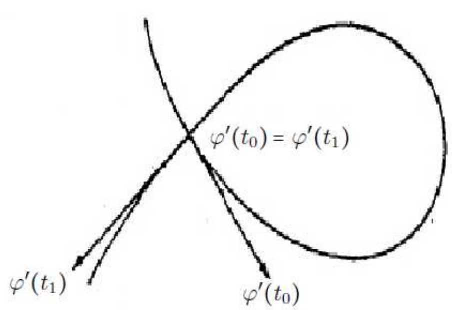
   (1) Encontre o conjunto das soluções maximais da equação $y' = F(x,y)$.

   (2) Para a equação em (1), vale a propriedade da unicidade de soluções? Caso a sua resposta seja negativa, isto contraria o teorema de Picard?

3. Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e suponha que $\phi : I \to \mathbb{R}^n$ seja solução de

$$\begin{cases} x' = F(t,x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1}$$

   É possível que existam $t \neq T$ satisfazendo: $\phi(t) = \phi(T)$ e $\{\phi'(t), \phi'(T)\}$ LI? Em caso afirmativo, isto contraria a unicidade de soluções dada pelo TEU?



   Dica. Note que $\frac{d}{dt}(t \sin t) = t\cos t + \sin t$ e $\frac{d}{dt}(t^2 \sin t) = t^2 \cos t + 2t \sin t$. Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solução de (1) passando por $(0,0)$. Avalie ϕ e ϕ', em π e 2π.

4. Seja $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e suponha que $\phi : I \to \mathbb{R}^n$ seja solução de

$$\begin{cases} x' = F(x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

É possível que existam $t \neq T$ tais que (i) $\phi(t) = \phi(T)$ e (ii) $\phi'(t) \neq \phi'(T)$? Compare com a questão anterior.

5. Sejam $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $G:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas, com F de Lipschitz. Mostre que vale a propriedade da unicidade de soluções para o problema

$$\begin{cases} x' = F(x), \\ y' = G(x)y, \\ \big(x(t_0), y(t_0)\big) = (x_0, y_0). \end{cases}$$

6. Sejam um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ e uma função $F:\Omega \to \mathbb{R}^n$ contínua e localmente Lipschitz na segunda variável. Seja $\phi : (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}^n$ uma solução maximal de $x' = F(t,x)$. Mostre as afirmações abaixo.

   (1) Não é verdade, em geral, que existam

   $$\lim_{t\to\omega_+} \phi(t) \quad \text{ou} \quad \lim_{t\to\omega_-} \phi(t),$$

   mesmo que $\omega_\pm$ sejam finitos. Apresente um exemplo.
   Dica: $\frac{d}{dt}(\sin 1/t) = -\frac{\cos 1/t}{t^2}$.

   (2) Se F é limitada e $\omega_+ \in \mathbb{R}$, mostre que

   $$\text{existe } x_+ = \lim_{t\to\omega_+} \phi(t) \quad \text{e} \quad (\omega_+, x_+) \in \partial\Omega.$$

   Analogamente para ω_-, se $\omega_- \in \mathbb{R}$.

7. Seja $F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ contínua e localmente Lipschitz na segunda variável. Suponha F limitada. Então, toda solução maximal de $x' = F(t,x)$ é global.

   Dica. Questão anterior.

8. Sejam um campo vetorial $X = (X_1, \ldots, X_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e uma função $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável satisfazendo

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) X_i(x) \leq 0 \;\text{ e }\; V(x) \geq |x|^2, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Mostre que toda solução maximal $x : (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}^n$, de $x' = X(x)$, é global.

Solução.

- Consideremos a função $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$F(t,x) = X(x).$$

Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, consideremos o problema com valor incial

$$\begin{cases} x'(t) = F\big(t, x(t)\big) = X\big(x(t)\big) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Seja (ω_-, ω_+) o intervalo aberto maximal desta solução.

- No teorema solução maximal vimos a notação e o resultado

$$\big(t, x(t)\big) \xrightarrow{t \nearrow \omega_+} \partial\Omega \qquad [\text{aqui, } \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n].$$

Isto é, o gráfico $(t, x(t))$ "escapa de qualquer compacto" de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Donde, no caso ω_+ real, a convergência "$(t, x(t)) \xrightarrow{t \nearrow \omega_+} \partial\Omega$" implica

$$x(t) \text{ é ilimitado se } t \nearrow \omega_+.$$

- Para provar $\omega_+ = +\infty$, basta verificar que $x = x(t)$ é limitada se $t \nearrow \omega_+$. Verifiquemos então. Seja

Sejam $f(t) = V(x(t))$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno em $\mathbb{R}^n$. Por hipótese,

$$f'(t) = \Big\langle \nabla V\big(x(t)\big), x'(t) \Big\rangle = \Big\langle \nabla V(x(t)), X\big(x(t)\big) \Big\rangle \leq 0.$$

Logo, f é decrescente e para todo $t \geq t_0$ temos

$$|x(t)|^2 \leq V\big(x(t)\big) = f(t) \leq f(t_0) = V(x_0).$$

Donde $x = x(t)$ é limitada em (t_0, ω_+) e portanto $\omega_+ = +\infty$.

Analogamente tem-se $\omega_- = -\infty$♣

9. (*Resultado utilizado na prova da Dependência Contínua, Seção 1.2.*)

   Seja $F : \Omega \to \mathbb{R}$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto, com $F = F(x,y)$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ contínuas. Seja K compacto em Ω. Mostre que existe uma constante M satisfazendo

$$|F(t,x) - F(t,y)| \le M|x-y|, \text{ se } (t,x) \in K \text{ e também } (t,y) \in K.$$

   [A constante independe dos pares.] Dica. Argumente por contradição.

10. **Desigualdade de Gronwall.** Seja $\delta : [0,T] \to [0,+\infty)$ contínua. Suponha que existam constantes $C \ge 0$ e $K \ge 0$ tais que

$$\delta(t) \le C + \int_0^t K\delta(s)\,ds, \text{ para todo } t \in [0,T].$$

   Mostre a desigualdade

$$\delta(t) \le Ce^{Kt}.$$

11. **EDO linear de ordem n e escalar X Sistema linear de ordem 1.** Sejam $b, a_0, \dots, a_{n-1}$ funções reais e contínuas definidas no intervalo aberto I. Considere a EDO linear de ordem n (coeficientes não constantes)

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)x = b(t) \tag{2}$$

   e a EDO linear de ordem 1 (um sistema)

$$X' = A(t)\cdot X + B(t) \tag{3}$$

   onde:

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

   Mostre que $x = x(t)$ é solução da edo escalar se e só se $X = (x, x', \dots, x^{(n-1)})$ é solução do sistema. Ainda, toda solução do sistema é dessa forma.

12. (Vide Lista 2 de exercícios.) Escreva cada uma das equações diferenciais lineares (escalares) com coeficientes constantes abaixo na forma de um sistema linear com coeficientes constantes no formato

$$X' = AX + B.$$

   (a) $P(D)x = x'' - 4x' + 13x = te^{2t}\sin 3t$.

   (b) $P(D)x = x'' + 2x' + 2x = e^{\alpha t}\mathrm{sen}\beta t$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (c) $P(D)x = x''' - 5x'' + 3x' + 9x = t^4 e^{3t}$.

   (d) $P(D)x = x''' - x' = 3e^{2t}$.

   (e) $P(D)x = x^{(4)} - 7x''' + 18x'' - 20x' + 8x = t^3 e^{2t}$.

   (f) $P(D)x = x^{(4)} + 8x'' + 16x = t^3\mathrm{sen}2t$.

   (g) $P(D)x = x^{(5)} + 2x''' + x' = 0$.

13. Para cada uma das edo's (escalares) na questão anterior considere a respectiva edo (escalar) homogênea. Encontre então o que é pedido abaixo.

   (1) Um conjunto LI de soluções (da homogênea). Vide Lista 2 de exercícios.

   (2) A respectiva matriz companheira A.

   (3) A cada conjunto LI e ordenado de soluções no item (1) encontre o respectivo conjunto LI e ordenado de soluções do respectivo sistema linear homogêneo

$$X' = AX.$$

   (4) A cada conjunto LI de soluções solicitado em (3) escreva a respectiva matriz de soluções $M = M(t)$ para o respectivo sistema linear

$$X' = AX.$$