MAT 226 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS I
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Segundo semestre de 2022

LISTA 3 DE EXERCÍCIOS

Notação: PVI indica Problema com Valor inicial, também dito Problema de Cauchy.

1. EDOL de primeira ordem, com coeficientes não constantes e não homogênea. Resolva os PVI's abaixo e, se possível, ache a solução maximal.

   (a) $xy' + 2y = \text{sen}x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

   (b) $y' + \frac{1}{x}y = 3\cos 2x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

   (c) $y' - 2xy = x, \quad y(0) = 1.$

2. Equação de Bernoulli $y' + p(x)y = q(x)y^n$. Prove (*) e resolva demais itens.

   (*) Reduza a edo de Bernoulli a uma linear com a mudança $z = y^{1-n}$.

   (a) $\frac{dy}{dx} = 5y - \frac{4x}{y}$

   (b) $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} - \sqrt{x}$, $t > 0$

   (c) $v\frac{dv}{dx} = v^2 - e^{2x}v^3$

   (d) $y' = ay - by^3$

   (e) $y(6y^2 - x - 1) + 2x\frac{dy}{dx} = 0$

   (f) $2x^3\frac{dy}{dx} = y(y^2 + 3x^2)$

3. Equação de Bernoulli. Ache as soluções maximais.

   (a) $\frac{dy}{dx} + y = xy^3$

   (b) $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = y^{\frac{1}{2}}$.

4. Variáveis Separáveis. Resolva.

   a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{x}, x > 0$

   b) $\frac{dv}{dt} = 4 - v^2$

   c) $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2+1}{t^2+1}, x(0) = 0$

   d) $\frac{dv}{dt} = 1 - t + y^2 - ty^2$

5. Variáveis separáveis. (a) Resolva $\frac{dx}{dt} = x^2 t$ e esboce o gráfico das soluções.

   (b) Determine e esboce as soluções com condição inicial:

   i) $x(1) = 0$ ii) $x(0) = 1$ iii) $x(0) = -1$

6. Equações Escalares Autônomas. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo não-degenerado e $f : I \to \mathbb{R}$ contínua com $f(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Considere a equação

$$\dot{x} = f(x) \qquad [\text{onde } x = x(t)].$$

(a) Encontre uma fórmula para as soluções (maximais) $x = x(t)$.

(b) Se $I = \mathbb{R}$ e f é limitada, toda solução maximal é global (domínio $\mathbb{R}$).

(c) Para cada $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times I$, demonstre a existência e unicidade de soluções para o problema de Cauchy com condição inicial (t_0, x_0).

7. Encontre as soluções maximais das equações abaixo.

(a) $y' = 1 + y^2$ (autônoma) (b) $y' - 2xy = x$ (ordem 1)

(c) $y' = (1 + x)(1 + y)$ (d) $3y' + y = 2e^{-x}$ (edolcc).

8. Curvas Integrais. Encontre as soluções para $x > 0$. Esboce várias das curvas integrais. Descreva o comportamento da solução, segundo $x \to 0^+$, para vários valores da constante de integração.

(a) $y' + \left(\frac{2}{x}\right) y = \frac{1}{x^2}$ (b) $y' - \left(\frac{1}{x}\right) y = x$

(c) $y' - \left(\frac{1}{x}\right) y = x^{\frac{1}{2}}$ (d) $y' + \left(\frac{1}{x}\right) y = \frac{\cos x}{x}$.

9. Equação Homogênea. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, considere a equação

$$\dot{x} = f\left(\frac{x}{t}\right), \text{ onde } t \neq 0.$$

Prove que a troca de variáveis $x = yt$ gera uma edo a variáveis separadas. Resolva as equações abaixo.

(a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{x}$ (c) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{y}$

(b) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-2xy}{x^2}$ (d) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy+x^2}$

10. Transforme, com mudanças de coordenadas adequadas, a equação da forma

$$\dot{x} = \frac{a_1 x + b_1 t + c_1}{a_2 x + b_2 t + c_2}$$

em edol homogênea ou de variáveis separadas. Resolva as equações abaixo. **Dica.** Se $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, faça $x = u + \alpha$ e $t = s + \beta$. Senão, $u = a_1 x + b_1 t$.

(a) O problema de Cauchy

$$\dot{x} = \frac{2x + t - 1}{x + 2t + 1}, \quad x(0) = 1.$$

(b) $(1+t-2y)dt+(4t-3y-6)dy = 0$ (c) $(t+2y+3)dt+(2t+4y-1)dy = 0$.

11. Equações Exatas. Verifique que são exatas as equações abaixo e as resolva.

    (a) $(2x+3y)dx+(3x+2y)dy=0$ (b) $\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy=0$, $y>0$

    (c) $(y-x^3)dx+(y^3+x)dy=0$ (d) $(3x^2+y)dx+(x+4)dy=0$.

12. Fator Integrante. As equações abaixo não são exatas (cheque) mas tem um fator integrante dependendo de x ou então um dependendo de y. Resolva-as.

    (a) $(3y^2-x^2+1)dx+2xydy=0$ (b) $xydx+(x^2-y^2)dy=0$

    (c) $(x^2+y^2)dx+(x^3+3xy^2+2xy)dy=0$.

13. Determine condições para que a equação $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ admita um fator integrante da forma $u(x,y)=h(t)$, com $t=xy$. Resolva a equação

$$(2y^2+2y)dx+(3xy+2x)dy=0.$$

14. Resolva cada um dos problemas de valor inicial

    (a) $2xy^3+3x^2y^2\frac{dy}{dx}=0$, $y(1)=1$ (b) $3x^2+4xy+(2y^2+2x^2)\frac{dy}{dx}=0$, $y(0)=1$.

15. Seja $u\in C^1(\Omega,\mathbb{R})$, com Ω aberto e um cone em $\mathbb{R}^2$ (logo, $\lambda\Omega\subset\Omega$ se $\lambda>0$).

    Seja u homogênea de grau p, i.e. $u(\lambda x,\lambda y)=\lambda^p u(x,y)$ se $\lambda>0$ e $(x,y)\in\Omega$. Mostre que u satisfaz a equação diferencial parcial

$$pu=xu_x+yu_y \qquad \text{[Dica: derive em } \lambda \text{ e faça } \lambda=1.]$$

16. Fator Integrante. Sejam M e N de classe C^1 e homogêneas de grau p definidas num cone aberto simplesmente conexo de $\mathbb{R}^2\smallsetminus\{0\}$. Suponha que $xM(x,y)+yN(x,y)$ não se anule. Mostre que $\mu(x,y)=[xM(x,y)+yN(x,y)]^{-1}$ é um fator integrante para a edol $N(x,y)y'+M(x,y)=0$.

17. Fator Integrante. Resolva as equações abaixo.

    (a) $3xy+y^2+(x^2+xy)\frac{dy}{dx}=0$ (b) $(x^2+y^2)+(x^3+3xy^2+2xy)\frac{dy}{dx}=0$

    (c)$(3y^2-x^2+1)+2xy\frac{dy}{dx}=0$.

18. Resolva cada um dos problemas de valor inicial.

$$2xy^3+3x^2y^2\frac{dy}{dx}=0, y(1)=1 \qquad 3x^2+4xy+(2y^2+2x^2)\frac{dy}{dx}=0y(0)=1$$

19. Seja $n\in\mathbb{N}^*$. Determine a família de curvas ortogonais à família $y=\lambda x^n$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $x\in(0,\infty)$. Esboce graficamente tal família.

20. Seja $Q = [a-\delta, a+\delta] \times [b-\delta, b+\delta]$ um quadrado centrado em (a,b) e uma função $G : Q \to \mathbb{R}$, com $G = G(u,v)$. Mostre que é possível reduzir o PVI

$$(1) \qquad \begin{cases} v'(u) & = G(u, v(u)), \\ v(a) & = b. \end{cases}$$

a um PVI da forma

$$(2) \qquad \begin{cases} y'(x) & = F(x, y(x)), \\ y(0) & = 0, \end{cases}$$

onde $F = F(x,y)$ é uma função definida no quadrado $[-1,+1] \times [-1,+1]$. Sugestão. *Defina F e $y(x)$ em termos de G e $v(u)$, respectivamente, de tal forma que v seja uma solução de (1) se e somente se y for solução de (2).*

21. (a) Resolva $\begin{cases} y' & = 2xy^{\frac{2}{3}}, \\ y(0) & = 1. \end{cases}$

    (b) Veja que o problema $\begin{cases} y' & = 2xy^{\frac{2}{3}}, \\ y(0) & = 0. \end{cases}$ tem mais de uma solução. Isto contraria o Teorema de Picard?

22. Dados $a < 0 < b$, verifique que a função $y(x) = \begin{cases} \frac{(x-a)^3}{27}, & \text{se } x \le a, \\ 0, & \text{se } a < x < b, \\ \frac{(x-b)^3}{27}, & \text{se } x \ge b, \end{cases}$ é solução de $\begin{cases} y' & = y^{\frac{2}{3}}, \\ y(0) & = 0. \end{cases}$

23. Mostre que a solução de $\begin{cases} y' & = (y^2-1)(y^2-2), \\ y(0) & = 0. \end{cases}$ satisfaz as desigualdades $-1 < y(x) < 1$ para todo x do seu domínio. Dica: Teorema de Picard.

24. Para cada uma das funções $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abaixo, considere a EDO $y' = f(x,y)$. Encontre as soluções maximais desta equação e, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$, discuta a existência e unicidade de soluções para o problema de Cauchy com condição inicial (x_0, y_0). Esboce os gráficos das soluções.

    (a) $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{1}{2}(y^2-1)$
    (b) $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x,y) = (xy)^2 - 4x^2$
    (c) $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy^3$
    (d) $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x,y) = x|y|$
    (e) $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x,y) = 5(y-1)^{4/5}$
    (f) $\Omega = \mathbb{R} \times [0,\infty)$, $f(x,y) = 2y^{1/2}$.