MAT 226 - Equações Diferenciais I
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Segundo Semestre de 2022

LISTA 0 - Recordação

1. **Binômio de Newton**

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^p\, b^{n-p}, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\ .$$

Sugestão: por indução. Lembrete:

$$0! = 1, \quad \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \quad \text{e} \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \text{ se } p = 0, 1, 2 \ldots., n.$$

2. **Progressão Geométrica**

$$s_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}\ , \ \forall a \in \ \mathbb{R}\ ,\ a \neq 1\ ,\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\ .$$

3. **Uma Fatoração Polinomial**

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1),\ \forall n \in \mathbb{N}\ .$$

4. **Um Produto Notável**

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \forall n \in \mathbb{N}\ .$$

5. **Teorema** Todo polinômio de grau ímpar e coeficientes reais têm ao menos uma raiz real.

   Sugestão: Mostre que se $z \in \mathbb{C}$ é raiz então $\overline{z}$ também é raiz.

6. **Raízes de** $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\ n \geq 1$, **com coeficientes,** a_i**, inteiros:**

   (i) Se $\alpha \in \mathbb{Z}$ é raiz então $\alpha | a_0$.

   (ii) Se $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ é raiz, $\text{mdc}(p,q) = 1$, então p divide a_0 e q divide a_n.

7. Resolva algumas equações de segundo grau sem a **fórmula de Baskhara** e então prove-a.

8. Sejam α , β em $\mathbb{R}$.

   (a) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$ (b) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

   (c) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ (d) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.

9. **Desigualdade Triangular** $|a+b| \ \leq \ |a| + |b|,\ \ \forall a\,, b \in \mathbb{R}$.

10. Mostre que, no **plano de Argand-Gauss**, se $z = a + ib \in \mathbb{C}$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 = 1$, então existe um único $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que,

$$z = \cos\theta + i\sin\theta.$$

11. Se $z_1 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1$ e $z_2 = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2$ então,

$$z_1 z_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\ .$$

12. Definindo $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (**Fórmula de Euler**) temos a **Fórmula de Moivre**:

$$z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = e^{in\theta}\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ .$$

13. Se $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$, o **módulo** de z é $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e o **conjugado** é $\overline{z} = a - ib$.

    (a) Se $z \neq 0$ então existe um único $\theta \in \mathbb{R}$, módulo 2π, tal que $z = |z|e^{i\theta}$.

    (b) Represente z, θ, $|z|$ e $\overline{z}$ (simétrico a z em relação ao eixo real).

    (c) $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = |\overline{z}|$, $|\mathrm{Re}(z)) \leq |z|$ e $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.

    (d) Para quaisquer $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$ e $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

    (e) Se $|z| = 1$, $z = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, então $\overline{z} = e^{-i\theta}$.

14. **Desigualdade Triangular**: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, para todos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

15. Se $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, com $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ e $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$ então, $z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$.

16. Se $\omega \in \mathbb{C}$, $\omega = a + ib$, com $a, b \in \mathbb{R}$, $|\omega| = 1$, então,

$$\text{existe}\ \ \omega^{-1} = \frac{1}{\omega} = \overline{\omega} = a - ib.$$

17. Sejam $\omega_2 = x_2 + iy_2 = e^{i\theta_2}$ e $\omega_1 = x_1 + iy_1 = e^{i\theta_1}$, com $x_j, y_j, \theta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, números complexos unitários (isto é, de comprimento 1). Então,

$$(a) \qquad \frac{\omega_2}{\omega_1} = e^{i(\theta_2 - \theta_1)} = cos(\theta_2 - \theta_1) + isen(\theta_2 - \theta_1)\ ,$$

$$(b) \qquad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{x_2 + iy_2}{x_1 + iy_1} = (x_2 + iy_2)(x_1 - iy_1) = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_1 y_2 - x_2 y_1)\ .$$

18. **Fórmula para o ângulo entre as representações dos números z_1 e z_2 em $\mathbb{C}^*$**, $z_j = x_j + iy_j = |z_j|e^{i\theta_j}$, com $x_j, y_j, \theta_j \in \mathbb{R}$, para $j = 1, 2$,

$$cos(\theta_2 - \theta_1) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{|z_1||z_2|}\ .$$