

MAT 225 - FUNÇÕES ANALÍTICAS
Instituto de Matemática e Estatística da USP
Ano 2015
Professor Oswaldo R. B. de Oliveira

<http://www.ime.usp.br/~oliveira> oliveira@ime.usp.br

Capítulo 8 - Teorema de Cauchy Homotópico e Logaritmo

- 8.1 - O Teorema de Cauchy Homotópico, se f tem primitiva em bolas.
- 8.2 - Logaritmo de uma Função.
- 8.3 - A Função Logaritmo.

Capítulo 1

NÚMEROS COMPLEXOS

Capítulo 2

TOPOLOGIA DO PLANO \mathbb{C}

Capítulo 3

POLINÔMIOS

Capítulo 4

SÉRIES E SOMABILIDADE

Capítulo 5

SÉRIES DE POTÊNCIAS

Capítulo 6

FUNÇÕES ANALÍTICAS

Capítulo 7

EXPONENCIAL, ÍNDICE, PRINCÍPIO DO ARGUMENTO E TEOREMA DE ROUCHÉ

Capítulo 8

TEOREMA DE CAUCHY HOMOTÓPICO E LOGARITMO

8.1 - O Teorema de Cauchy Homotópico, se f tem Primitiva em Bolas

Como se hábito, Ω indica um aberto. Nesta seção, todas as curvas são contínuas em um aberto Ω .

Dada $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, uma função $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é uma primitiva de f se temos

$$F' = f.$$

Nesta seção estudamos funções holomorfas (i.e., deriváveis) que admitem uma primitiva em cada bola contida em Ω [no Capítulo 10 - Integração Complexa - veremos que toda função holomorfa possui tal propriedade] e curvas contínuas em Ω .

É claro que toda f analítica em Ω tem uma primitiva em cada bola em Ω .

O trivial resultado a seguir, para funções holomorfas arbitrárias, é fundamental. Notemos que a prova difere bastante da correspondente prova que já mostramos para funções analíticas.

8.1 Proposição. *Seja f em $\mathcal{H}(\Omega)$, com Ω conexo. Se $f' \equiv 0$ então f é constante. Ainda, duas primitivas de f (se existirem) diferem por uma constante.*

Prova.

Pondo $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, com $z = x + iy$ em Ω , sabemos que

$$F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

é diferenciável num aberto conexo O de \mathbb{R}^2 e tem diferencial nulo. Logo, u e v são \mathbb{R} -diferenciáveis em O e tem gradiente nulo. Pelo teorema do valor médio, em \mathbb{R}^2 , concluímos que u e v são constantes. A conclusão é trivial♣

A seguir, consideremos uma função holomorfa $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, admitindo primitiva em bolas abertas, e uma curva contínua $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$.

Seja $3r > 0$ a distância do compacto $\text{Imagem}(\gamma)$ ao fechado $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Como γ é uniformemente contínua, segue que existe uma partição $\{a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b\}$ satisfazendo $|\gamma(t) - \gamma(s)| \leq r$, para todos t e s em $[a_{k-1}, a_k]$ e $k = 1, \dots, n$. Então, temos (Vide Figura 8.1)

$$\gamma([a_{k-1}, a_k]) \subset A_k = B(\gamma(a_k); 2r) \subset \Omega \text{ para } k = 1, \dots, n.$$

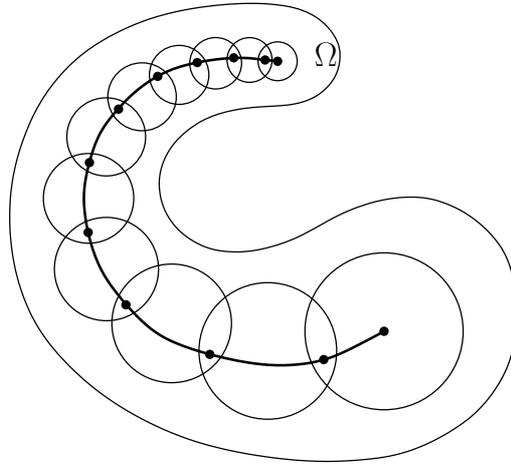


Figura 8.1:

Seja $g_k : A_k \rightarrow \mathbb{C}$ uma primitiva local de f , para cada $k = 1, \dots, n$.

8.2 Definição. A “integral discreta” de f ao longo da curva contínua γ é a soma

$$(8.2.1) \quad \sum(f; \gamma) = \sum_{k=1}^n [g_k(\gamma(a_k)) - g_k(\gamma(a_{k-1}))].$$

Na próxima proposição provaremos que tal definição é bem posta.

No Capítulo 10 - Integração - veremos que o somatório (8.2.1) estende a definição de integral de f sobre γ , se γ é de classe C^1 por partes.

A utilização das aspas em “integral discreta” justifica-se pois tal somatório não envolve aproximações.

8.3 Proposição. *O valor do somatório (8.2.1) independe das escolhas das partições, das bolas abertas e das primitivas, sujeitas às condições especificadas.*

Prova.

Mantenhamos as notações acima.

Seja $\{a = b_0 < b_1 < \dots < b_m = b\}$ uma partição, com $\gamma([b_{k-1}, b_k]) \subset B_k$ e B_k uma bola aberta em Ω , e $h_k : B_k \rightarrow \mathbb{C}$ primitiva local de f , para $k = 1, \dots, m$.

Seja $\{a = c_0 < \dots < c_p = b\}$ formada por $\{a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m\}$, com $\gamma([c_{k-1}, c_k])$ na bola C_k em Ω e $F_k : C_k \rightarrow \mathbb{C}$ primitiva local de f , para cada $k = 1, \dots, p$.

Temos

$$[a_0, a_1] = [c_0, c_1] \cup \dots \cup [c_{p_1-1}, c_{p_1}] \text{ para algum } p_1 \text{ em } \{1, \dots, p\}.$$

Logo,

$$g_1(\gamma(a_1)) - g_1(\gamma(a_0)) = \sum_{k=1}^{p_1} [g_1(\gamma(c_k)) - g_1(\gamma(c_{k-1}))].$$

Dado k em $\{1, \dots, p_1\}$, temos $\gamma([c_{k-1}, c_k])$ contido no aberto conexo $A_1 \cap C_k$.

Portanto, em $A_1 \cap C_k$ as funções g_1 e F_k diferem por uma constante. Donde segue

$$\sum_{k=1}^{p_1} [g_1(\gamma(c_k)) - g_1(\gamma(c_{k-1}))] = \sum_{k=1}^{p_1} [F_k(\gamma(c_k)) - F_k(\gamma(c_{k-1}))].$$

Repetindo a argumentação para g_2, \dots, g_n obtemos

$$\sum_{k=1}^n [g_k(\gamma(a_k)) - g_k(\gamma(a_{k-1}))] = \sum_{k=1}^p [F_k(\gamma(c_k)) - F_k(\gamma(c_{k-1}))] \clubsuit$$

É trivial ver que a definição (8.2) independe da particular parametrização da curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ (se o sentido de γ é mantido). De fato, se $\xi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ é contínua, com $\xi(c) = a$ e $\xi(d) = b$, considerando c_k tal que $\xi(c_k) = a_k$, para cada $k = 1, \dots, n$, então temos

$$\sum(f; \gamma) = \sum(f; \gamma \circ \xi).$$

Dadas $\eta : [b, c] \rightarrow \Omega$ e a curva reversa $\gamma^- : [a, b] \rightarrow \Omega$, temos

$$\sum(f; \gamma \vee \eta) = \sum(f; \gamma) + \sum(f; \eta) \quad \text{e} \quad \sum(f; \gamma^-) = -\sum(f; \gamma).$$

8.4 Definição. Consideremos duas curvas contínuas

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \quad \text{e} \quad \eta : [a, b] \rightarrow \Omega.$$

Dizemos que γ e η são **próximas** se existe uma partição $\{a = a_0 < \dots < a_n = b\}$ e bolas abertas B_1, \dots, B_n em Ω tais que

$$\gamma([a_{k-1}, a_k]) \cup \eta([a_{k-1}, a_k]) \subset B_k, \quad \text{para todo } k = 1, \dots, n.$$

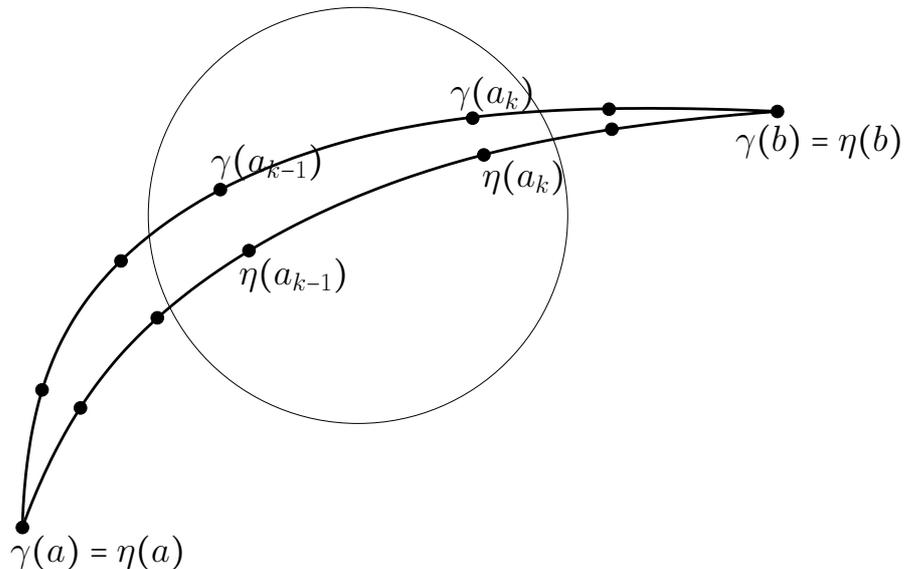


Figura 8.2: Curvas próximas (com mesmo ponto inicial e mesmo ponto final)

8.5 Lema. *Sejam $\gamma, \eta : [a, b] \rightarrow \Omega$ curvas próximas e f uma função holomorfa com primitiva em cada bola aberta em Ω . Suponhamos que ao menos uma das condições ocorre:*

- (A) γ e η tem mesmo ponto inicial e mesmo ponto final.
 (B) γ e η são fechadas.

Então,

$$\sum(f; \gamma) = \sum(f; \eta).$$

Prova.

Esquemáticamente, temos duas possibilidades para o par γ, η :

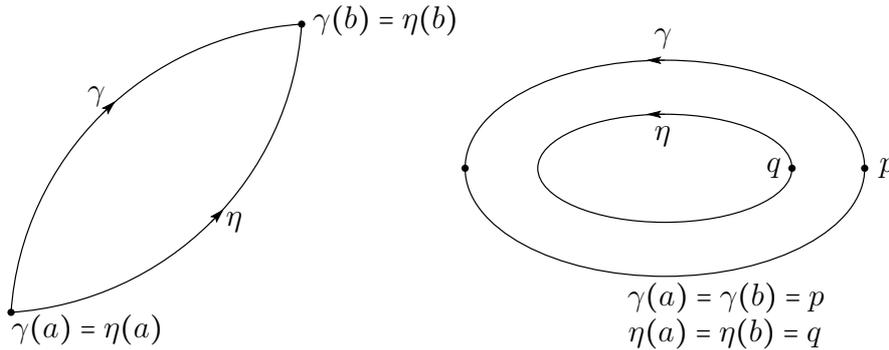


Figura 8.3: Ilustração ao Lema 8.5

A seguir, mantemos a notação na definição de curvas próximas.

Consideremos $g_k : B_k \rightarrow \mathbb{C}$ uma primitiva local de f , para cada $k = 1, \dots, n$.

No conexo $B_k \cap B_{k+1}$, com $1 \leq k \leq n-1$, a diferença $g_{k+1} - g_k$ é constante e

$$g_{k+1}(\eta(a_k)) - g_{k+1}(\gamma(a_k)) = g_k(\eta(a_k)) - g_k(\gamma(a_k)).$$

Então, sob a condição (A) ou sob a condição (B), temos

$$\begin{aligned} \sum(f; \eta) - \sum(f; \gamma) &= \sum_{k=1}^n [g_k(\eta(a_k)) - g_k(\eta(a_{k-1}))] - \sum_{k=1}^n [g_k(\gamma(a_k)) - g_k(\gamma(a_{k-1}))] = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} [g_k(\eta(a_k)) - g_k(\gamma(a_k))] - \sum_{k=1}^{n-1} [g_{k+1}(\eta(a_k)) - g_{k+1}(\gamma(a_k))] + \\ &\quad + [g_n(\eta(a_n)) - g_n(\gamma(a_n))] - [g_1(\eta(a_0)) - g_1(\gamma(a_0))] = \\ &= g_n(\eta(b)) - g_n(\gamma(b)) - g_1(\eta(a)) + g_1(\gamma(a)). \\ &= 0 \clubsuit \end{aligned}$$

Sejam

$$\gamma_0 : [a, b] \rightarrow \Omega \text{ e } \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega,$$

duas curvas contínuas e com mesmo ponto inicial e mesmo ponto final. Analogamente à definição de homotopia para curvas fechadas no capítulo 7, dizemos que γ_0 e γ_1 são Ω -homotópicas (com extremos fixos) se existe uma função

$$H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \Omega$$

contínua (a homotopia) satisfazendo

$$\begin{cases} H(0, t) = \gamma_0(t), \forall t \in [a, b] \\ H(1, t) = \gamma_1(t), \forall t \in [a, b] \end{cases} \text{ e } \begin{cases} H(s, a) = \gamma_0(a), \forall s \in [0, 1] \\ H(s, b) = \gamma_0(b), \forall s \in [0, 1]. \end{cases}$$

Fixado $s \in [0, 1]$, escrevemos $H_s = \gamma_s$ para a curva $H(s, t)$, onde $t \in [a, b]$.

Também indicamos a homotopia H pela família de curvas $\{H_s\}_{0 \leq s \leq 1}$.

Doravante, toda homotopia entre curvas com mesmo ponto inicial e mesmo ponto final é uma homotopia que mantém os extremos fixos.

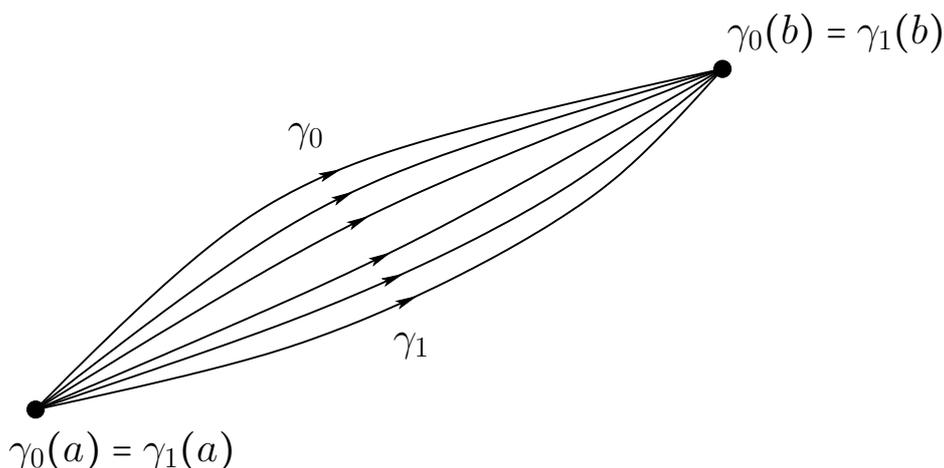


Figura 8.4: Homotopia entre curvas com mesmas extremidades

Dadas duas curvas homotópicas com mesmo ponto inicial e mesmo ponto final, subentendemos que a homotopia mantém os extremos fixos.

Dadas duas curvas homotópicas e fechadas, subentendemos que a homotopia é entre curvas fechadas.

8.6 Teorema de Cauchy Homotópico (na presença de primitiva em bolas). *Consideremos*

$$\gamma_0 : [a, b] \rightarrow \Omega \quad e \quad \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$$

curvas contínuas e homotópicas, com mesmo ponto inicial e mesmo ponto final ou ambas fechadas. Seja f holomorfa em Ω e admitindo primitiva em bolas abertas. Então,

$$\sum(f; \gamma_0) = \sum(f; \gamma_1).$$

Em particular, se γ_0 é homotópica a um ponto,

$$\sum(f; \gamma_0) = 0.$$

Prova.

Mantidas as notações, basta ver que

$$s \mapsto \sum(f; H_s)$$

é localmente constante.

Fixemos s em $[0, 1]$. Existem uma partição $\{a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b\}$, e uma sequência finita de bolas abertas B_k tais que

$$H_s([a_{k-1}, a_k]) \subset B_k \subset \Omega$$

e funções $g_k : B_k \rightarrow \mathbb{C}$, primitivas locais de f , para $k = 1, \dots, n$. Temos

$$H([a_{k-1}, a_k] \times \{s\}) \subset B_k, \text{ para } k = 1, \dots, n.$$

Como H é contínua, existem I_1, \dots, I_n abertos em $[0, 1]$ e contendo s tais que

$$H([a_{k-1}, a_k] \times I_k) \subset B_k, \text{ para cada } k.$$

Então, o conjunto $I = I_1 \cap \dots \cap I_n$ é aberto em $[0, 1]$ e contém s . Dado $u \in I$, a curva H_u é próxima a H_s sendo que elas tem mesmo ponto inicial e mesmo ponto final ou são fechadas. Pelo Lema 8.5

$$\sum(f; H_u) = \sum(f; H_s) \clubsuit$$

8.7 Teorema [Primitiva Global (para funções com primitiva em bolas)].

Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa que admite primitiva em cada bola aberta em Ω , onde Ω é um aberto simplesmente conexo. Fixemos α em Ω . Dado $z \in \Omega$ e uma curva contínua $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$, com $\gamma(a) = \alpha$ e $\gamma(b) = z$, definimos a função

$$F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \text{ por } F(z) = \sum (f; \gamma).$$

Então, F está bem definida e é uma primitiva de f . Isto é, F é derivável e

$$F'(z) = f(z).$$

Em particular, se f é analítica então a primitiva existe e é analítica.

Prova.

- ◇ A definição é boa. Se $\eta : [b, c] \rightarrow \Omega$ é uma outra curva contínua de α a z , ao justapormos a curva reversa $\eta^- : [b, c] \rightarrow \Omega$ [desde z até α] à curva γ obtemos a curva fechada $\gamma \vee \eta^-$. Pelo Teorema de Cauchy homotópico segue

$$0 = \sum (f; \gamma \vee \eta^-) = \sum (f; \gamma) + \sum (f; \eta^-) = \sum (f; \gamma) - \sum (f; \eta).$$

- ◇ A derivada de F . Fixemos z em Ω e uma bola $B(z; r)$ em Ω , com raio $r > 0$, na qual f tem uma primitiva g . Dado h com $0 < |h| < r$, seja $\sigma : [b, c] \rightarrow B(z; r)$ tal que $\sigma(b) = z$ e $\sigma(c) = z + h$. Pelas propriedades já verificadas do somatório (8.2.1) segue

$$F(z + h) = F(z) + \sum (f; \sigma).$$

Por definição, temos

$$\sum (f; \sigma) = g(z + h) - g(z).$$

Donde segue

$$\frac{F(z + h) - F(z)}{h} = \frac{g(z + h) - g(z)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} g'(z) = f(z).$$

- ◇ Se f é analítica, localmente temos $F' \equiv \sum a_n (z - z_0)^n$ e, pela Proposição 8.1,

$$F(z) = \sum \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1} + C$$

para alguma constante $C \clubsuit$

8.2 - Logaritmo de uma Função

8.8 Teorema. *Seja Ω um aberto simplesmente conexo e $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, sem zeros.*

(a) *Existe $\varphi \in \mathcal{A}(\Omega)$, dita um logaritmo para f , tal que*

$$e^\varphi = f.$$

Notação: $\varphi = \log f$.

(b) *Existe $\psi \in \mathcal{A}(\Omega)$, dita uma raiz quadrada (analítica) para f , tal que*

$$\psi^2 = f.$$

Notação: $\psi = \sqrt{f}$. Ainda, \sqrt{f} é única a menos da multiplicação por ± 1 .

Prova.

(a) Pelo teorema 8.7 existe $g \in \mathcal{A}(\Omega)$ tal que

$$g' = \frac{f'}{f}.$$

Então $h = e^g$ não se anula e satisfaz

$$\frac{h'}{h} = \frac{f'}{f}.$$

Donde segue $f'h - fh' = 0$ e $\left(\frac{f}{h}\right)' = 0$. Logo, existe uma constante não nula, a qual podemos supor da forma e^{w_0} para algum $w_0 \in \mathbb{C}$, tal que

$$f = e^{w_0} h = e^{g+w_0}.$$

(b) Basta definir $\psi = e^{\varphi/2}$, onde $e^\varphi = f$ ♣

Notemos que a função $z \mapsto \frac{1}{z}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e admite primitiva local.

8.9 Corolário. *Sejam Ω um aberto simplesmente conexo, $\Omega \neq \mathbb{C}$, e $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Então, existe um logaritmo analítico $g(z) = \log(z - \alpha)$ para $z \mapsto z - \alpha$, onde $z \in \Omega$.*

Prova. Segue trivialmente do teorema 8.8 ♣

8.3 - A Função Logaritmo

O Teorema 8.8 permite uma abordagem bastante asséptica de uma função logaritmo $\log(z)$. Para isto proponho o seguinte exercício (é simples).

Exercício. Mostre que o plano fendido $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ é simplesmente conexo.

Com tal exercício, o teorema 8.8 nos garante a existência de uma $f(z)$ analítica tal que $e^{f(z)} = z$ para todo z no plano fendido. Tal função é o **logaritmo principal**. Porém, é também importante uma abordagem direta.

Através do argumento principal $\text{Arg} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow (-\pi, \pi)$, definimos o **logaritmo principal**

$$\text{Log} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{por} \quad \text{Log}(z) = \ln|z| + i\text{Arg}(z),$$

onde $\ln : (0, +\infty) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ é a inversa da exponencial real. Evidentemente, $\text{Log}(z)$ é uma função injetora e contínua. Ainda mais,

$$\exp(\text{Log}(z)) = e^{\ln|z|} e^{i\text{Arg}(z)} = |z| e^{i\text{Arg}(z)} = z.$$

Então, temos $\exp \circ \text{Log} = \text{Id}$, onde Id é a função identidade no plano fendido. Computemos a derivada de $\text{Log}(z)$. Supondo $h \neq 0$ obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{(\exp \circ \text{Log})(z+h) - (\exp \circ \text{Log})(z)}{h} \\ &= \frac{(\exp \circ \text{Log})(z+h) - (\exp \circ \text{Log})(z)}{\text{Log}(z+h) - \text{Log}(z)} \frac{\text{Log}(z+h) - \text{Log}(z)}{h}. \end{aligned}$$

Como $\text{Log}(z+h) - \text{Log}(z) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ e $\exp'(w) = \exp(w) \neq 0$, concluímos que $\text{Log}(z)$ é derivável e ainda $1 = \exp'(\text{Log}(z)) \text{Log}'(z) = z \text{Log}'(z)$. Isto é

$$\text{Log}'(z) = \frac{1}{z}.$$

É simples obter uma série de potências para $\text{Log}(z)$ na bola $B(1; 1)$. Temos

$$(\text{Log}(1+z))' = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n, \quad \text{se } |z| < 1,$$

e portanto, pelo princípio de unicidade para séries de potências convergentes [vide comentário ao Teorema de Abel (5.12)], temos

$$\text{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots, \quad \text{se } |z| < 1.$$