PROVA SUBSTITUTIVA P2 - FUNÇÕES ANALÍTICAS- IMEUSP

30 de junho, 2015

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	

Nome : ____

N$^{\underline{o}}$USP : ____

Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Evite utilizar teoria da integração complexa.
As funções nesta prova são analíticas ou inteiras, ambas no sentido de Weierstrass.
Justifique todas as passagens, com uma redação clara.
Escolha 5 (cinco questões).
BOA SORTE!

1. (a) Considere uma curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ contínua e fechada e $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\text{Imagem}(\gamma)$. Defina o índice de γ em relação ao ponto α, denotado por $\text{Ind}(\gamma; \alpha)$. Ainda, defina o interior de γ que é denotado $I(\gamma)$.

   (b) Seja Ω um aberto em $\mathbb{C}$ e uma curva $\gamma : [a, b] \to \Omega$ contínua e fechada. Considere $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analítica, com f não se anulando em $\text{Imagem}(\gamma)$. Defina o número de zeros de f no interior de γ, denotado $Z(f; \gamma)$.

   (c) Enuncie o Teorema de Rouché.

   (d) Enuncie o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA).

   (e) Prove o TFA como um corolário do Teorema de Rouché.

2. (a) Defina função analítica.

(b) Defina o interior, $I(\gamma)$, de uma curva contínua e fechada

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$$

e o número de zeros $Z(f;\gamma)$ de uma função analítica f no interior de γ.

(c) Enuncie o Teorema de Rouché.

(d) Seja

$$p(z) = z^5 + 13z^2 + 15, \text{ onde } z \in \mathbb{C}.$$

Determine o número de zeros de $p = p(z)$ nas coroas abaixo

(1) $\{z : 1 < |z| < 2\}$ (2) $\left\{z : 2 < |z| < \frac{5}{2}\right\}$.

3. (a) Defina função inteira (no sentido de Weierstrass).

   (b) Determine todos os pares de funções inteiras (no sentido de Weierstrass) que satisfazem
$$f^2(z) + g^2(z) = 1, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

4. (a) Defina transformação de Möbius.

No que segue, determine e esboce a imagem dos conjuntos abaixo pela transformação de Möbius

$$\varphi(z) = \frac{z - i}{z + i}.$$

(b) A linha horizontal $i + t$, com $t \in \mathbb{R}$.

(c) A semi-circunferência superior $|z| = 2$, com $\mathrm{Im}(z) \geq 0$.

(d) A semi reta vertical $\mathrm{Re}(z) = 1$ e $\mathrm{Im}(z) \geq 0$.

5. (a) Defina produto cruzado.

A seguir, considere z_1, z_2, z_3 e z_4 tais que está bem definido $[z_1, z_2, z_3, z_4]$.

(b) Considere uma transformação de Möbius φ. Mostre que

$$[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4] = [z_1, z_2, z_3, z_4], \quad \text{onde } \zeta_j = \varphi(z_j) \text{ e } j = 1, 2, 3, 4.$$

(c) Mostre que

$$\overline{[z_1, z_2, z_3, z_4]} = [\overline{z_1}, \overline{z_2}, \overline{z_3}, \overline{z_4}].$$

6. (a) Enuncie a propriedade associativa para uma família

$$(p_j)_J$$

de números reais positivos ou nulos. Isto é, $p_j \geq 0$ para todo $j \in J$.

(b) Prove a propriedade enunciada em (a).