3ª PROVA DE FUNÇÕES ANALÍTICAS- IMEUSP - MAT 225

02 de julho, 2015

Q	N
Total	

Nome : ____________________GABARITO(parcial)____________________
NºUSP : ___________________________________
Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Justifique todas as passagens, com uma redação clara.
Escolha 5 (cinco questões).
BOA SORTE!

1. Seja $B(0;1) \subset \mathbb{C}$. Seja $f_n : B(0;1) \to \mathbb{C}$ uma sequência de funções deriváveis e com derivadas contínuas. Sejam $f : B(0;1) \to \mathbb{C}$ e $g : B(0;1) \to \mathbb{C}$ arbitrárias tais que

$$\begin{cases} f_n \longrightarrow f \text{ uniformemente sobre compactos se } n \to +\infty \\ \text{e} \\ f_n' \longrightarrow g \text{ uniformemente sobre compactos se } n \to +\infty. \end{cases}$$

Prove (logo, não pode utilizar o teorema da convergência de Weierstrass) que

$$f \text{ é derivável e } f' = g.$$

2. Seja $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ infinitamente derivável (logo, holomorfa e analítica) e com uma singularidade isolada em $z = 0$.

   (a) Apresente as definições do tipo de singularidade que f pode ter em $z = 0$.

   (b) Suponha que
   $$\lim_{z\to 0} zf(z) = 0.$$
   Prove que $z = 0$ é singularidade removível da função f.

Solução.

(a) Deixo ao leitor.

(b) Seja $r > 0$. Desenvolvendo em série de Laurent, encontramos coeficientes complexos $\ldots, b_3, b_2, b_1, a_0, a_1, a_2, \ldots$ tais que
$$zf(z) = \left(\cdots + \frac{b_3}{z^2} + \frac{b_2}{z}\right) + (b_1 + a_0 z + a_1 z^2 + \cdots), \text{ se } 0 < |z| \leq r.$$
Pela hipótese sobre $zf(z)$ e por continuidade, existe $M > 0$ tal que
$$|zf(z)| \leq M \text{ se } 0 < |z| \leq r \quad \text{e} \quad |b_1 + a_0 z + a_1 z^2 + \cdots| \leq M \text{ se } |z| \leq r.$$
A desigualdade triangular garante
$$\left|\cdots + \frac{b_3}{z^2} + \frac{b_2}{z}\right| \leq 2M, \text{ se } 0 < |z| \leq r.$$
Pela desigualdade de Gutzmer-Parseval segue
$$\left(\frac{|b_2|^2}{|z|^2} + \frac{|b_3|^2}{|z|^4} + \cdots\right) \leq 4M^2, \text{ se } 0 < |z| \leq r.$$
Donde segue
$$b_m = 0 \text{ se } m \geq 2.$$
Desta forma temos
$$0 = \lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0}(b_1 + a_0 z + a_1 z^2 + a_2 z^3) = b_1 \clubsuit$$

3. Seja f holomorfa em $B(a;R)$, onde $R>0$, com desenvolvimento em série de potências com coeficientes complexos

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \text{ para todo } z\in B(a;R).$$

Dado r tal que $0<r<R$, mostre que

(Identidade de Gutzmer-Parseval) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(a+re^{i\theta})|^2 d\theta=\sum |c_n|^2 r^{2n}.$$

Solução.

Fixemos r, com $0<r<R$. Seja θ a variável em $[0,2\pi]$. Temos

$$f(a+re^{i\theta})=\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta}.$$

Para cada ângulo θ, a família [com $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ como conjunto de índices]

$$c_n r^n e^{in\theta}\overline{c_m} r^m e^{-im\theta} \text{ é somável}$$

e satisfaz $|c_n r^n e^{in\theta}\overline{c_m} r^m e^{-im\theta}|=|c_n||c_m|r^n r^m$, com $\sum_{n,m}|c_n||c_m|r^n r^m<\infty$.

A lei associativa então garante

$$|f(a+re^{i\theta})|^2=\sum_n\sum_m c_n r^n e^{in\theta}\overline{c_m} r^m e^{-im\theta}=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n+m=p} c_n r^n \overline{c_m} r^m e^{i(n-m)\theta}.$$

Seja $p=0,1,2,\ldots$. O teste-M aplicado à sequência de funções

$$\sum_{n+m=p} c_n r^n e^{in\theta}\overline{c_m} r^m e^{-im\theta}, \quad \text{onde } \theta \text{ varia em } [0,2\pi],$$

[o teste é aplicável pois $\sum_p\sum_{n+m=p}|c_n|r^n|c_m|r^m<\infty$] garante que

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n+m=p} c_n\overline{c_m} r^{n+m} e^{i(n-m)\theta} \text{converge uniformemente a} |f(a+re^{i\theta})|^2.$$

Observemos que

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}d\theta=\begin{cases} 0 & \text{se } n\neq m\\ 2\pi & \text{se } n=m.\end{cases}$$

Seja δ_{nm} o delta de Kronecker. É claro que $(c_n r^n\overline{c_m} r^m\delta_{nm})$ é somável.

Empregando a convergência uniforme e a lei associativa, nesta ordem, segue

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}|f(a+re^{i\theta})|^2 d\theta &=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n+m=p} c_n\overline{c_m} r^n r^m\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}d\theta\\ &=2\pi\sum_n\sum_m c_n\overline{c_m} r^n r^m\delta_{nm}\\ &=2\pi\sum_n |c_n|^2 r^{2n}\ \clubsuit\end{aligned}$$

4. Mostre que está bem definida a integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^4 + 16a^4}\, dx, \text{ com } a > 0.$$

Compute a integral acima.

Solução.

- Bem definida. A função $x^4 + 16a^4$ não se anula em $\mathbb{R}$ e é contínua. Ainda mais, o integrando é uma função par. Basta então analisarmos em $[0, +\infty)$. Restrito ao intervalo $[0, 1]$, o integrando é contínuo e desta forma integrável. Em $[1, +\infty)$, temos a desigualdade

$$\frac{|x \sin x|}{x^4 + 16a^4} \leq \frac{|x|}{x^4 + 16a^4} \leq \frac{1}{x^3}, \quad \text{com} \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} < \infty.$$

Isto mostra que a integral acima está bem definida.

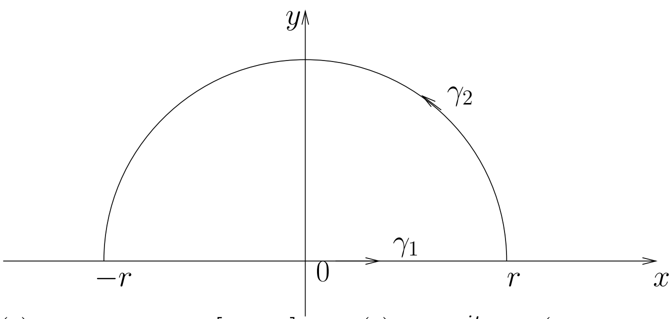
- Preparação. Seja

$$f(z) = \frac{z e^{iz}}{z^4 + 16a^4}.$$

Os polos de f são os zeros (simples) de $z^4 + 16a^4$, os quais pertencem a

$$\{2a\omega, -2a\omega, 2a\overline{\omega}, -2a\overline{\omega}\}, \quad \text{onde } \omega = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i.$$

Seja $r > 3a$. Consideremos o contorno semi-circular $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ abaixo



com $\gamma_1(t) = t$ para $t \in [-r, r]$ e $\gamma_2(t) = re^{it} = r(\cos t + i \sin t)$ para $t \in [0, \pi]$. Pelo teorema dos resíduos segue

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \left[\text{Res}(f; 2a\omega) + \text{Res}(f; -2a\overline{\omega})\right] = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

- Integrais de contorno. Escrevamos $z = x + iy$.

Suponhamos $|z| = |x + iy| = r > 3a$ e $y > 0$. Desta forma encontramos $|z^4 + 16a^4| \geq 81r^4 - 16a^4 > r^4$ e portanto

$$|f(z)| \leq \frac{r|e^{i(x+iy)}|}{r^4} = \frac{e^{-y}}{r^3} \leq \frac{1}{r^3}.$$

A estimativa M-L então garante

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z)dz \right| \leq \frac{\pi r}{r^3} \longrightarrow 0 \text{ se } r \to +\infty.$$

Por outro lado, pela já feito na parte "bem definida" é claro que

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{-r}^{r} \frac{x e^{ix}}{x^4 + 16a^4} dx \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^4 + 16a^4} dx \quad \text{se } r \to +\infty.$$

◇ Cálculo dos resíduos e finalização. Pelos cômputos acima segue

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^4+16a^4}dx = 2\pi i \left[\mathrm{Res}(f;2a\omega) + \mathrm{Res}(f;-2a\overline{\omega})\right].$$

Pelas propriedades para resíduos (e notando que $\omega^2 = i$), obtemos

$$\mathrm{Res}(f;2a\omega) = \frac{2a\omega e^{i2a\omega}}{4(2a\omega)^3} = -i\frac{e^{i2a\omega}}{16a^2}$$

e então

$$\mathrm{Res}(f;-2a\overline{\omega}) = \frac{-2a\overline{\omega}e^{-i2a\overline{\omega}}}{4(-2a\overline{\omega})^3} = \overline{\mathrm{Res}(f;2a\omega)}.$$

Como a função $x \mapsto x\cos x$ é ímpar, segue então que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^4+16a^4}dx = i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^4+16a^4}dx.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^4+16a^4}dx &= 2\pi\left(\mathrm{Res}(f;2a\omega) + \overline{\mathrm{Res}(f;2a\omega)}\right) \\
&= -\frac{4\pi}{16a^2}\mathrm{Re}\left(ie^{i2a\omega}\right). \\
&= \frac{\pi}{4a^2}\mathrm{Im}(e^{i2a\omega}).
\end{aligned}$$

Notemos que $2a\omega = a\sqrt{2} + ia\sqrt{2}$. Logo, $i2a\omega = -a\sqrt{2} + ia\sqrt{2}$. Assim,

$$e^{i2a\omega} = e^{-a\sqrt{2}}\left[\cos(a\sqrt{2}) + i\sin(a\sqrt{2})\right].$$

Finalmente, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^4+16a^4}dx = \frac{\pi e^{-a\sqrt{2}}\sin(a\sqrt{2})}{4a^2} \clubsuit$$

5. Defina função meromorfa na esfera complexa.

Seja f meromorfa na esfera complexa e satisfazendo as condições

(a) $f(0) = 0$, $f(-1) = 2$ e $f(3) = 3$.

(b) f tem um polo simples em $z = 1$ com resíduo 1.

(c) f tem um polo triplo em $z = 2$ com resíduo 2.

Determine f e calcule seu desenvolvimento de Laurent na coroa

$$\{z : 1 < |z| < 2\}.$$

Solução.

A função que procuramos é da forma

$f(z) = \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{a_3}{(z-2)^3} + \dfrac{a_2}{(z-2)^2} + \dfrac{2}{z-2} + a_0$, com $f(0) = 0, f(-1) = 2$ e $f(3) = 3$.

De fato, subtraindo as partes principais,

$$f(z) - \frac{1}{z-1} - \frac{a_3}{(z-2)^3} - \frac{a_2}{(z-2)^2} - \frac{a_3}{z-2} \quad \text{é holomorfa em } \mathbb{C}$$

tal que o ponto ∞ não é singularidade essencial (pois f é meromorfa) e nem é um polo (pois ∞ não é polo de f). Logo, ∞ é singularidade removível de f. Assim, f é limitada e então, pelo teorema de Liouville, constante. Temos então

$$\begin{cases} -1 & -\frac{a_3}{8} & +\frac{a_2}{4} & -1 & +a_0 & = 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{a_3}{27} & +\frac{a_2}{9} & -\frac{2}{3} & +a_0 & = 2 \\ \frac{1}{2} & +a_3 & +a_2 & +2 & +a_0 & = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -a_3 & +2a_2 & +8a_0 & = 16 \\ -a_3 & +3a_2 & +27a_0 & = \frac{171}{2} \\ a_3 & +a_2 & +a_0 & = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Obtemos

$$a_0 = 4, \quad a_2 = -\frac{13}{2} \quad \text{e} \quad a_3 = 3.$$

Logo,

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{3}{(z-2)^3} - \frac{13/2}{(z-2)^2} + \frac{2}{z-2} + 4.$$

Seja z tal que $1 < |z| < 2$. Temos, $(1/|z|) < 1$ e

- $\dfrac{1}{z-1} = \dfrac{1/z}{1-\frac{1}{z}} = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{z^{n+1}}.$
- $\dfrac{1}{z-2} = \dfrac{-1/2}{1-\frac{z}{2}} = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{2^n}$

Derivando a série acima encontramos

- $\dfrac{1}{(z-2)^2} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{nz^{n-1}}{2^n}.$

Derivando novamente obtemos

- $\dfrac{1}{(z-2)^3} = -\dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{n(n-1)z^{n-2}}{2^n}.$

Por fim, no anel $\{z : 1 < |z| < 2\}$ temos

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{z^{n+1}} - \frac{3}{16}\sum_{n\geq 0} \frac{(n+2)(n+1)z^n}{2^n} - \frac{13}{16}\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)z^n}{2^n} - \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{2^n} + 4 \clubsuit$$

6. (a) Defina função meromorfa em um aberto Ω contido em $\mathbb{C}$..
   (b) Seja f meromorfa em $\mathbb{C}$. Defina $\mathrm{Res}(f;\infty)$, o resíduo de f no ponto ∞.
   (c) Determine os resíduos da função

$$f(z) = \frac{z+1}{(z-2)^2} \cos\left(\frac{2\pi z - 2}{2z}\right)$$

no ponto ∞ e no ponto $z = 0$.

Solução.

(a)

(b)

(c) • O ponto $z = \infty$. Em uma vizinhança de $z = 0$, consideremos

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\frac{1}{z}+1}{\left(\frac{1}{z}-2\right)^2} \cos\left(\frac{\frac{2\pi}{z}-2}{\frac{2}{z}}\right)$$

$$= -\frac{z^2+z}{(1-2z)^2}\cos(z).$$

Então $g(z)$ tem uma singularidade removível em $z = 0$, pomos $g(0) = 0$. Em uma vizinhança da origem, temos

$$g(z) = 0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots.$$

Logo, $f(z)$ tem o seguinte expansão em uma vizinhança do infinito

$$f(z) = \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \cdots.$$

Por definição,

$$\mathrm{Res}(f;\infty) = -a_1.$$

É claro que

$$a_1 = g'(0).$$

É fácil verificar que

$$-g'(0) = 1.$$

Donde segue $a_1 = -1$ e

$$\mathrm{Res}(f;\infty) = 1.$$

• O ponto $z = 0$. Temos

$$f(z) = \frac{z+1}{(z-2)^2}\cos\left(\pi - \frac{1}{z}\right) = -\frac{z+1}{(z-2)^2}\cos\left(\frac{1}{z}\right).$$

É claro que

$$\lim_{z\to 0} \frac{z+1}{(z-2)^2} = \frac{1}{4}. \tag{6.1}$$

Temos
$$\cos\left(\frac{1}{z}\right) = 1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} + \cdots.$$
Então $z = 0$ é singularidade essencial de $\cos(1/z)$ e

(6.2) $$\text{não existe } \lim_{z\to 0} \cos\left(\frac{1}{z}\right) \text{ em } \mathbb{C}\cup\{\infty\}.$$

Por (6.1) e (6.2) segue que

não existe $\lim_{z\to 0} f(z)$ em $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ e $z = 0$ é singularidade essencial de $f(z)$

Temos
$$\frac{1}{z-2} = \frac{-1/2}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}, \text{ se } z \in B(0;2).$$
Derivando encontramos
$$\frac{1}{(z-2)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nz^{n-1}}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)z^n}{2^{n+2}}.$$
Donde segue
$$\begin{aligned}
(z+1)\frac{1}{(z-2)^2} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)z^{n+1}}{2^{n+2}} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)z^n}{2^{n+2}}\\
&= \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{mz^m}{2^{m+1}} + \frac{1}{4} + \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(m+1)z^m}{2^{m+2}}\\
&= \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{3m+1}{2^{m+2}}z^m, \text{ se } z \in B(0;2).
\end{aligned}$$
A seguir, escrevamos
$$(z+1)\frac{1}{(z-2)^2} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \cdots, \ z \in B(0;2),$$
e
$$\cos\left(\frac{1}{z}\right) = b_0 - \frac{b_2}{z^2} + \frac{b_4}{z^4} - \frac{b_6}{z^6} + \cdots, \ z \in B(0;2),$$
onde
$$a_m = \frac{3m+1}{2^{m+2}} \ \text{ e } \ b_{2m} = \frac{1}{(2m)!}.$$
Pelas regras operatórias para séries de potências, o coeficiente de $1/z$ após efetuarmos o produto
$$(a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+a_5z^5+\cdots)\left(b_0 - \frac{b_2}{z_2} + \frac{b_4}{z^4} - \frac{b_6}{z^6} + + \frac{b_8}{z^8} + \cdots\right)$$
é dado por
$$(-a_1b_2 + a_3b_4 - a_5b_6 + a_7b_8 + \cdots) = \sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^m a_{2m-1}b_{2m}.$$
Logo,
$$\text{Res}(f;0) = \sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^m a_{2m-1}b_{2m} \clubsuit$$

7. (a) Defina função meromorfa no plano estendido $\overline{\mathbb{C}}$.
   (b) Mostre que toda função meromorfa em $\overline{\mathbb{C}}$ é racional.

8. Seja f holomorfa em $\mathbb{C}$, exceto um número finito de polos $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$.

   (a) Defina $\operatorname{Res}(f; \infty)$, o resíduo de f no ponto ∞.

   (b) Mostre que

$$\operatorname{Res}(f; \zeta_1) + \cdots + \operatorname{Res}(f; \zeta_n) + \operatorname{Res}(f; \infty) = 0.$$

9. Seja $f = f(x,y) : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ contínua e tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$$

existe e é contínua. Suponha que existe uma função $M : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que

$$|f(x,y)| \leq M(y), \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq M(y) \quad \text{e} \quad \int_0^\infty M(y)dy < \infty.$$

(a) Mostre que está bem definida a integral imprópria e é contínua a função

$$F(x) = \int_0^\infty f(x,y)dy, \quad \text{onde } x \in \mathbb{R}.$$

(b) Mostre que F é derivável e

$$F'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy.$$

Dica. Utilize (e enuncie) a regra de Leibnitz para a derivação sob o sinal de uma integral própria de uma função (real e com parâmetro real).

10. Seja $f(z)$ analítica na bola aberta $B(0;1)$ e com $f'(z)$ limitada neste disco. Mostre que f pode ser estendida continuamente ao disco $D(0;1)$ e que a extensão é uniformemente contínua em $D(0;1)$.

Solução.

Escrevamos

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots, \text{ onde } z \in B(0;1).$$

Pelo teorema de derivação para séries de potências temos

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + 4a_4 z^3 + \cdots, \text{ onde } z \in B(0;1).$$

Por hipótese, existe $M > 0$ tal que

$$|a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + 4a_4 z^3 + \cdots| \leq M, \text{ para todo } z \in B(0;1).$$

Então, pela desigualdade de Gutzmer-Parseval segue

$$\big(|a_1|^2 + |2a_2|^2|z|^2 + |3a_3|^2|z|^4 + \cdots\big) \leq M^2, \text{ para todo } z \in B(0;1).$$

Assm, impondo $|z| \to 1^-$ obtemos

$$\big(|a_1|^2 + |2a_2|^2 + |3a_3|^2 + \cdots\big) \leq M^2.$$

Observando que

$$|a_n| = n|a_n|\frac{1}{n} \leq \frac{n^2|a_n|^2 + \frac{1}{n^2}}{2},$$

obtemos

$$\sum_{n\geq 1} |a_n| \leq \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \left(n^2 |a_n|^2 + \frac{1}{n^2} \right) < \infty.$$

Donde seque que

$$\sum a_n z^n \text{ converge absolutamente em } D(0;1) = \overline{B(0;1)}.$$

Pelo Teorema de Abel, tal convergência é uniforme em $D(0;1)$. Logo,

$$f(z) = \sum a_n z^n$$

se estende continuamente a $D(0;1)$. Como a extensão é contínua em $D(0;1)$ e o disco $D(0;1)$ é compacto, a extensão é uniformemente contínua$\clubsuit$