MAT 225 - Funções Analíticas - IMEUSP - Semestre 1 de 2015

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Lista 8 de Exercícios

Faça os exercícios abaixo com uma redação clara e não sobrecarregada em simbologia.

1. Seja $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, com campo associado de classe C^∞. Escrevamos $z=x+iy$ e $f=u+iv$.

   (a) Mostre que f é derivável no ponto z_0 se e somente se

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

   Mostre que nestes casos temos

   $$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0).$$

   Roteiro (introdução ao operador $\overline{\partial}$). Para o que segue, acrescentamos as notações

   $$(1.1)\qquad x=\frac{z+\overline{z}}{2} \quad , \quad y=\frac{z-\overline{z}}{2i} \quad \text{e}$$

   $$f(z) = u(x,y)+iv(x,y) = u\left(\frac{z+\overline{z}}{2},\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)+iv\left(\frac{z+\overline{z}}{2},\frac{z-\overline{z}}{2i}\right).$$

   (a) Utilize "ingenuamente" as notações em (1.1) e a regra da cadeia e encontre

   $$\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2i}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+i\left(\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{2i}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

   $$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{2i}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+i\left(\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{1}{2i}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

   (b) Defina os operadores [vide comentários em Ahlfors, 3rd edition, p. 27]

   $$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

   Mostre que f é derivável no ponto z_0 se e somente se

   $$\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0.}$$

   Mostre que se f é derivável em z_0, então

   $$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0).$$

==

Notações para os exercícios 2, 3, 4 e 5.

- Seja Ω um aberto conexo. Seja γ uma curva em Ω, contínua e fechada, e Ω-homotópica a um ponto [logo, $\text{Ind}_\gamma \equiv 0$ em $\mathbb{C}\setminus\Omega$] e tal que $\text{Ind}_\gamma \equiv 1$ em seu interior $I(\gamma)$.

- Seja f uma função holomorfa/analítica em Ω e não se anulando em Imagem(γ). Indicamos o número de zeros de f em $I(\gamma)$, com suas multiplicidades, por $Z(f;\gamma)$.

2* **Princípio do Argumento para holomorfas.** Se γ é de classe C^1 por partes, então

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz = Z(f;\gamma).$$

Sugestão. Teorema 7.21 e Teorema 10.10 nas notas de aula.

3* (a) Prove que a associação

$$F \mapsto \frac{F'}{F},$$

com F derivável, transforma produtos em somas.

(b) Se $P(z) = (z-a_1)\cdots(z-a_n)$, com $a_1,\ldots,a_n$ as raízes de $P(z)$, o que é

$$\frac{P'}{P}?$$

(c) Seja σ uma curva fechada e C^1 por partes que não passa por nenhuma das raízes do polinômio $P(z)$ no item anterior. Mostre que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{P'(z)}{P(z)}dz = \text{Ind}(\sigma;a_1)+\cdots+\text{Ind}(\sigma;a_n).$$

(d) **Derivada Logarítmica**. Seja f holomorfa em Ω e com um número finito de zeros de ordens $m_1,\ldots,m_n$ respectivamente. Consideremos a fatoração

$$f(z) = (z-z_1)^{m_1}\cdots(z-z_n)^{m_n}g(z)$$

com g holomorfa e não se anulando em Ω. Prove:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_1}{z-z_1}+\cdots+\frac{m_n}{z-z_n}+\frac{g'(z)}{g(z)}.$$

4* **(Segundo) Princípio do Argumento para quociente de analíticas**. Se

$$f = \varphi g,\ \text{com } \varphi \text{ e } g \text{ analíticas em } \Omega,$$

então

$$Z(\varphi;\gamma) = Z(f;\gamma) - Z(g;\gamma).$$

Sugestão. Teorema 7.21.

5* **Princípio do Argumento p/ quociente de holomorfas**. Se γ é C^1 por partes e

$$f = \varphi g,\ \text{com } \varphi \text{ e } g \text{ analíticas em } \Omega.$$

Prove que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi'}{\varphi} = Z(f;\gamma) - Z(g;\gamma).$$

Fim das notações específicas adotadas para os exercícios 2,3,4 e 5.

==

6* Prove os resultados abaixo (sem a teoria de séries).

(a) (**Desigualdades de Cauchy**). Usando a fórmula integral para as derivadas sucessivas de uma $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa, dê uma limitação para as derivadas

$$f^{(n)}(a), \text{ fixados } a \in \Omega \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

(b) (**Teorema de Liouville**). Utilizando a fórmula integral de Cauchy, prove que se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é holomorfa e limitada então f é constante.

7. Seja $F : O \to \mathbb{C}$ contínua com O um aberto em $\mathbb{C}$. Seja $\gamma : [0,1] \to O$ uma curva de classe C^1 por partes. Seja w um ponto arbitrário no aberto $W = O \setminus \text{Imagem}(\gamma)$. Mostre que a função

$$\Phi(w) = \int_\gamma \frac{F(z)}{z - w} dz$$

é holomorfa no aberto W e

$$\Phi'(w) = \int_\gamma \frac{F(z)}{(z - w)^2} dz.$$

8. (a) Sejam $f = u + iv$ holomorfa em $B(\alpha; R)$. Mostre que

$$\int_\gamma \frac{iu + v}{(z - \alpha)^2} dz = 0, \qquad \text{onde } \gamma(\theta) = \alpha + re^{i\theta}, \text{ com } 0 < r < R \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

(b) Calcule $f(1)$, onde f é holomorfa em $\mathbb{C}$ e satisfaz

$$f(z) = \int_{|w|=1} \frac{w^2 e^w}{w - z} dw, \text{ para todo } z \in B(0;1).$$

9. Mostre que a integral abaixo independe do valor real a:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+ia)^2} dx.$$

10. Seja $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ e

$$f(z) = \int_0^1 \frac{e^{it}}{t - z} dt, \text{ para cada } z \in \Omega.$$

Mostre que f é analítica em Ω e determine a série de potências que representa f, em uma vizinhança de um ponto arbitrário $a \in \Omega$.

11* Seja Ω aberto em $\mathbb{C}$ e (f_n) uma sequência de funções holomorfas em Ω que converge uniformemente para f em cada subconjunto compacto de Ω. Mostre que f é holomorfa em Ω e que

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(z) = f^{(k)}(z), \text{ para quaisquer } z \in \Omega \text{ e } k \in \mathbb{N}.$$

12* Seja f holomorfa em $B(a;R)$, onde $R > 0$, com desenvolvimento em série de potências $\sum c_n(z-a)^n$. Dado r tal que $0 < r < R$, mostre que

(**Identidade de Gutzmer-Parseval**) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum |c_n|^2 r^{2n}.$$

13* Resolva este exercício de forma distinta e independente do próximo exercício (a respeito do teorema de Riemann sobre remoção de singularidades). Considere um aberto Ω, um ponto $\alpha \in \Omega$ e uma função $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{\alpha\})$. Prove as afirmações.

(a) Se f é limitada em $B(\alpha;r) \setminus \{\alpha\}$, onde $r > 0$, então temos

$$\int_{\partial\Delta} f = 0$$

para todo triângulo fechado e convexo contido em Ω.

(b) Se f é contínua no ponto α, então f é holomorfa em Ω.

14* **Teorema de Riemann sobre Remoção de Singularidades.** Seja $f \in \mathcal{H}(\Omega\setminus\{a\})$ e com f limitada em $B(a;r) \setminus \{a\}$, para algum $r > 0$. Mostre que podemos definir f no ponto a de forma que a extensão $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é holomorfa em Ω.

15. *Sejam Ω um aberto no plano complexo e $[a,b]$ um intervalo compacto na reta. Seja $f : \Omega \times [a,b] \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Suponha f holomorfa na primeira variável, para cada t fixado em $[a,b]$. Considere a função*

$$F(z) = \int_a^b f(z,t)dt, \text{ onde } z \in \Omega.$$

Mostre que

(a) F é contínua.

(b) F é holomorfa.

(c) Vale a fórmula,

$$F'(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt, \text{ para todo } z \in \Omega.$$

16. **Uma fórmula substituindo o método dos coeficientes indeterminados e o método do anulador.** Considere o operador diferencial linear de ordem $n \geq 1$ e com coeficientes reais, na variável real t e dado por

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) = a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 I \quad [a_n \neq 0],$$

onde I é o operador identidade sobre o espaço $C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

Considere o polinômio característico

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0, \text{ onde } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Sejam $Q = Q(t)$ uma função em $C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e um número complexo arbitrário γ. Mostre que

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)[Q(t)e^{\gamma t}] = \left[\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!}Q^{(n)} + \cdots + \frac{p''(\gamma)}{2!}Q'' + \frac{p'(\gamma)}{1!}Q' + \frac{p(\gamma)}{0!}Q\right]e^{\gamma t}.$$

17. Utilizando a fórmula no exercício 16, encontre uma solução particular de

$$(a) \quad x''' - 3x'' + 4x' - 2x = t^2 e^t \sin t.$$

$$(b) \quad x''' - 4x'' + 6x' - 4x = t^2\, e^t \, \mathrm{cos} t.$$