MAT 225 - Funções Analíticas - IMEUSP - Semestre 1 de 2015

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Lista 6 de Exercícios

Os exercícios se referem a funções analíticas ou inteiras, ambas no sentido de Weierstrass. Prove suas afirmações, com uma redação clara e não sobrecarregada em simbologia.

1* Verifique as fórmulas, para z e w arbitrários no plano complexo,

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1, \\ \operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w, \\ \cos(z+w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w. \end{cases}$$

2. **Regra de Leibniz para derivadas.** Sejam f e g duas funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e ambas de classe C^∞. Mostre que

$$(fg)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)} g^{(n-j)}.$$

3. Seja $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ um polinômio com coeficientes complexos. Seja j tal que $0 \leq j \leq n$. Escreva a j-ésima derivada $P^{(j)}$ no formato

$$P^{(j)}(z) = \sum_{\cdots}^{\cdots} [\ldots] \qquad\qquad \text{[isto é, “preencha os pontinhos”].}$$

4. Seja $r > 0$. Seja $\gamma(t) = re^{it}$, onde $t \in [0, 2\pi]$. Mostre que

$$\operatorname{Ind}(\gamma; \alpha) = \begin{cases} 1, & \text{se } |\alpha| < r, \\ 0, & \text{se } |\alpha| > r. \end{cases}$$

5. Sejam $r > 0$, $p \in \mathbb{N}^*$ e $m \in \mathbb{N}^*$. Sejam ainda

$$\gamma(t) = re^{it}, \text{ onde } 0 \leq t \leq 2\pi p, \text{ e } f(z) = z^m.$$

Considere a curva

$$\Gamma = f \circ \gamma.$$

Compute $\operatorname{Ind}(\Gamma; 0)$. [Se $p = 1$, então m é o número de zeros de f no *interior* de γ.]

6. Consideremos o quadrado Q centrado na origem e de vértices

$$z_0 = z_4 = 1 + i, \quad z_1 = -1 + i, \quad z_2 = -(1+i), \quad \text{e} \quad z_3 = 1 - i.$$

Consideremos as curvas (esboce os segmentos lineares)

$$\gamma_k(t) = z_k + (t-k)(z_{k+1} - z_k), \text{ onde } t \in [k, k+1], \text{ para } k = 0, 1, 2, 3.$$

Seja $\gamma : [0, 4] \to \mathbb{C}$ dada pela justaposição

$$\gamma = \gamma_0 \vee \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3.$$

Isto é, $\gamma(t) = \gamma_k(t)$ se $t \in [k, k+1]$ e γ é a fronteira do quadrado Q. Mostre que

$$\operatorname{Ind}(\gamma; 0) = \operatorname{Ind}(\gamma_0; 0) + \operatorname{Ind}(\gamma_1; 0) + \operatorname{Ind}(\gamma_2; 0) + \operatorname{Ind}(\gamma_3; 0).$$

Mostre que

$$\operatorname{Ind}(\gamma_k; 0) = \frac{1}{4} \text{ para } k = 0, 1, 2, 3.$$

Mostre então que $\operatorname{Ind}(\gamma; 0) = 1$.

7. Seja $R > 1$ e γ o semi-círculo orientado no sentido anti-horário (esboce) dado por

$$\gamma(t) = \begin{cases} Re^{it}, & \text{se } 0 \leq t \leq \pi \\ t - (\pi + R), & \text{se } \pi \leq t \leq \pi + 2R. \end{cases}$$

Mostre que $\mathrm{Ind}(\gamma; i) = 1$.

8. Seja γ a figura oito (esboce a curva) dada por

$$\gamma(t) = \begin{cases} 1 - e^{it}, & \text{se } t \in [0, 2\pi], \\ -1 + e^{-it}, & \text{se } t \in [2\pi, 4\pi]. \end{cases}$$

Mostre que $\mathrm{Ind}(\gamma; 1) = 1$, $\mathrm{Ind}(\gamma; -1) = -1$ e $\mathrm{Ind}(\gamma; i) = 0$.

9* Sejam $a \neq 0$ e $z_1, \ldots, z_m$ tais que $|z_j| \neq 1$ para $j = 1, \ldots, m$. Consideremos

$$p(z) = a(z - z_1)\cdots(z - z_m).$$

Seja $\gamma(t) = e^{it}$, para $t \in [0, 2\pi]$. Mostre que

$$\mathrm{Ind}(p \circ \gamma; 0) \text{ é o número de } z_{j's} \text{ no interior de } \gamma.$$

10. Seja λ um número complexo. Considere a função

$$f(t) = e^{\lambda t}, \text{ onde } t \in \mathbb{R}.$$

Compute

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{h}, \text{ onde } h \text{ é real.}$$

11. Encontre um polinômio $x(t)$ que resolva a equação dada.

    (a) $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = i$

    (b) $x''(t) + x'(t) + x(t) = it$

    (c) $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 2y = t^2$

    (d) $y'''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 1 + t + t^2$

    (e) $\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 9x = 1 + i$.

    Sugestão. Identifique o grau do polinômio $x(t)$ [supondo que a solução existe]. É trivial (acredite). Substitua a expressão polinomial na edo dada. Determine os coeficientes de forma suave, montando um *sistema linear triangular inferior*.

12. Entre os exercícios da prova P1, resolva aqueles que você ainda não resolveu.