MAT 225 - Funções Analíticas - IMEUSP - Semestre 1 de 2015

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Lista 4 de Exercícios

Notação: Ω é um **aberto não vazio** de $\mathbb{C}$.

1. Considere em $\mathbb{R}^2$ a coleção de bolas abertas

$$\mathcal{C} = \left\{B(a_n; r_m) : a_n \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \text{ e } r_m \in \mathbb{Q}, \text{ com } r_m > 0\right\}.$$

   Mostre que $\mathcal{C}$ é enumerável e que todo aberto no plano é uma união de bolas em $\mathcal{C}$.

2. Seja Z um subconjunto discreto de $\mathbb{R}^2$. Mostre que Z é enumerável.

3. Exiba os termos de ordem ≤ 3 na expansão em séries de potências de

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-2)}, \text{ em } z = 1, \qquad \text{e} \quad f(z) = \frac{z-2}{(z+3)(z+2)} \text{ em } z = 1.$$

4. Seja Ω não vazio e aberto em $\mathbb{R}^2$. Verifique as afirmações abaixo.

   (a) As componentes conexas de Ω são abertas.

   (b) Se $\mathcal{C}$ é uma componente conexa de Ω, então $\partial C \subset \partial\Omega$.

5. Seja Ω um aberto conexo $[\varnothing \neq \Omega \subset \mathbb{C}]$ e $a \in \Omega$. Mostre que $\Omega \setminus \{a\}$ é conexo.

6. Sejam (X, d) [para facilitar, suponha $X = \mathbb{R}^2$, com a métrica usual] e C um subconjunto conexo de X. Mostre que

$$\text{se } \ C \subset D \subset \overline{C}, \ \text{ então } D \text{ é conexo.}$$

7. Demonstre que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

8. Suponha que ρ, com $0 < \rho < \infty$, é o raio de convergência de $\sum a_n z^n$ e que em um ponto z_0 em $\partial B(0;\rho)$ a série converge absolutamente. Mostre que

$$\sum a_n z^n \text{ converge absoluta e uniformemente em } D(0;\rho).$$

9. Mostre que a seguinte função não é complexa-derivável (i.e., holomorfa),

$$f(z) = \begin{cases} e^{-z^{-4}}, & \text{se } z \in \mathbb{C}^*, \\ 0, & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

mas valem as equações de Cauchy-Riemann em todo ponto.

10. (a) Seja Ω aberto e não vazio em $\mathbb{C}$. Mostre que Ω é conexo se e somente se Ω é conexo por caminhos.

    (b) Dê um exemplo de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ que é conexo mas não é conexo por caminhos [verifique que o exemplo satisfaz o desejado].

11. Um aberto Ω, contido em $\mathbb{C}$, é dito **estrelado** se existe um ponto $p \in \Omega$ tal que para todo $z \in \Omega$, o segmento linear unindo p e z está contido em Ω. Um conjunto $X \subset \mathbb{C}$ é **convexo** se dados dois pontos arbitrários em X então o o segmento linear unindo tais dois pontos está contido em X. Prove o que segue.

    (a) Se Ω é aberto e estrelado, então Ω é simplesmente conexo.

    (b) O aberto $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ é estrelado (e simplesmente conexo).

    (c) Todo aberto convexo é estrelado.

12. Seja Ω aberto, conexo e não vazio em $\mathbb{C}$. Seja $D(p;r)$ um disco fechado contido em Ω. Mostre que $\Omega \setminus D(p;r)$ é conexo.
    Dica. Considere $B(p;R)$ com $D(p;r) \subset B(p;R) \subset \Omega$. Cheque que $B(p;R) \setminus D(p;r)$ é conexo. Considere uma cisão de $\Omega \setminus D(p;r)$ e derive uma contradição.

13. Sejam (X,d) um espaço métrico, $Y \subset X$ e o sub-espaço métrico (Y,d).

    (a) Seja $C \subset Y$. Então, C é conexo segundo (Y,d) se e somente se C é conexo segundo (X,d). [Isto é, o conceito de conexidade é absoluto.]

    (b) Seja $K \subset Y$. Então, K é compacto segundo (Y,d) se e somente se K é compacto segundo (X,d). [Isto é, o conceito de compacidade é absoluto.]