MAT 225 - Funções Analíticas - IMEUSP - Semestre 1 de 2015

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

LISTA 1 DE EXERCÍCIOS

1. Mostre que dados $z, w \in \mathbb{C}$ então $(z+w)^n = \sum\limits_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} z^p w^{n-p}$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$.

2. Escreva na forma binômica ($z = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$) os números complexos:

   (a) $(4-i)+i-(6+3i)i$ $\qquad$ (b) $\dfrac{3-i}{4+5i}$ $\qquad$ (c) $\left(\dfrac{2+i}{3-2i}\right)^2$.

3. Se $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$), determine as partes real e imaginária de:

   (a) z^4 $\qquad$ (b) $\dfrac{z-1}{z+1}$ $\qquad$ (c) $\dfrac{1}{z^2}$.

4. (Raízes Quadradas) Determine elementarmente (i.e., não utilize Fórmula de Moivre ou Fórmula de Euler) as soluções $z \in \mathbb{C}$ da equação

   $$z^2 = a + ib, \quad \text{onde } a, b \in \mathbb{R}.$$

   Dica: Determine as partes real e imaginária de z e uma fórmula para z.

5. Dados $z, w \in \mathbb{C}$ mostre que:

   (a) $|z \pm w|^2 = |z|^2 + |w|^2 \pm 2\mathrm{Re}(z\overline{w})$

   (b) $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ (lei do paralelogramo; interprete tal lei)

6. Sejam $z_1, \ldots, z_n$ arbitrários em $\mathbb{C}$. Mostre que

   $$|z_1 + \cdots + z_n| \geq |z_1| - |z_2| - \cdots - |z_n|.$$

7. Seja $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, e $a_j \in \mathbb{C}$, para $j = 0, \ldots, n$, com grau$(p) = n$ (i.e., $a_n \neq 0$). Seja z_0 fixo em $\mathbb{C}$. Considere a função $P(z) = p(z + z_0)$.

   (A) Mostre que P é um polinômio.

   (B) Mostre que P e p tem mesmo grau e mesmo coeficiente dominante: a_n.

   (C) Mostre que o termo independente de P é $p(z_0)$.

8. Mostre que $\left(\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1$ e $\left(\frac{\pm i \pm \sqrt{3}}{2}\right)^6 = -1$.

9. Mostre que se $m \in \mathbb{N}^*$ e q e r são o quociente e o resto da divisão inteira de m por 4 (isto é, $m = 4q + r$, $0 \leq r \leq 3$), então $i^m = i^r$. Compute:

   (a) i^{55} $\qquad$ (b) i^{1041} $\qquad$ (c) i^{47} $\qquad$ (d) $1 + i + i^2 + \cdots + i^{2014}$.

10. Seja $M_2(\mathbb{R})$ o anel das matrizes quadradas de ordem 2 com coeficientes reais, munido das operações usuais de adição e multiplicação.

Considere $\mathbb{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Mostre que a função

$$\Phi : a + ib = z \in \mathbb{C} \longmapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{M}$$

é isomorfismo de corpos e de espaços vetoriais reais. Isto é, Φ é bijetora e satisfaz

$$\begin{cases} \Phi(z+w) = \Phi(z) + \Phi(w), \quad \Phi(zw) = \Phi(z)\Phi(w) \ \text{ e } \ \Phi(\lambda z) = \lambda\Phi(z), \\ \\ \text{para quaisquer } z \in \mathbb{C}, w \in \mathbb{C} \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Identificando $\mathbb{M}$ com um subespaço vetorial normado de $\mathbb{R}^4$, temos

$$|\Phi(z)| = \sqrt{2}|z| \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Comentário. O número $z = 1$ é identificado com a matriz identidade (associada à tranformação linear identidade no plano) I. O número $z = i$ é identificado com a matriz associada à rotação (R) de 90 graus $(\pi/2$ rad) no sentido anti-horário. Notemos que

$$R(e_1) = (0,1) = e_2 \ \text{ e } \ R(e_2) = (-1,0) = -e_1.$$

11. Dadas as sequências $(z_k)_{1\leq k\leq n}$ e $(w_k)_{1\leq k\leq n}$, de números complexos, prove:

$$\text{(Desigualdade de Cauchy)} \quad \left| \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k} \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2 \right).$$

Dica: Inicie com o caso $n = 2$.

12. Desenhe a região do plano determinada por

(a) $\left|\dfrac{z+1}{z-1}\right| \leq 1$ $\qquad$ (b) $\text{Re}\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right) = 0$ $\qquad$ (c) $|z+1| = 2|z|$.

13. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_2$ e $a \in \mathbb{R}_+^*$, desenhe o conjunto:

$$\{z : |z - z_1| + |z - z_2| = 2a\}, \text{ com a condição } 2a > |z_1 - z_2|.$$

14. Seja $z = a + ib \in \mathbb{C}$, com a e b em $\mathbb{R}$. Definamos a função $|\,.\,|_1 : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{R}$ por,

$$|z|_1 = |a| + |b| \ .$$

Mostre que tal função é uma norma (sobre $\mathbb{C}$). Isto é,

- $|z|_1 \geq 0$, para todo z em $\mathbb{C}$, e $|z|_1 = 0$ se e somente se $z = 0$.
- $|\lambda z|_1 = |\lambda|\,|z|_1$, para quaisquer $z \in \mathbb{C}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $|z+w|_1 \leq |z|_1 + |w|_1$, para quaisquer z em $\mathbb{C}$ e w em $\mathbb{C}$.

Seja a, b, c e d quatro números reais arbitrários. Mostre que

(A) $\qquad (|a|+|b|)^2(|c|+|d|)^2 \ \leq \ 4\big[\,|ac-bd| + |ad+bc|\,\big]^2$

(B) $\qquad |ac-bd| + |ad+bc| \ \leq \ (|a|+|b|)(|c|+|d|)$.

Sejam $z = a + ib$ e $w = c + id$. Mostre que

(C) $\qquad |\overline{z}|_1 = |z|_1 \qquad \text{e} \qquad \dfrac{|z|_1|w|_1}{2} \leq |zw|_1 \ \leq |z|_1\,|w|_1.$

15. Seja $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, e $a_j \in \mathbb{C}$, para $j = 0, \ldots, n$. Seja z_0 fixo em $\mathbb{C}$. Mostre que existem coeficientes $b_0, \cdots, b_n$ em $\mathbb{C}$ tais que

$$p(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \cdots + b_n(z - z_0)^n, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Dica: $p(z) = p(z - z_0 + z_0)$.

16. A derivada (formal) de um polinômio $p(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ é

$$p'(X) = n a_n X^{n-1} + (n-1) a_{n-1} X^{n-2} + \cdots + a_1.$$

Seja α em $\mathbb{C}$. Utilizando somente derivadas formais, mostre que

(A) α é raíz simples de $p(X)$ se e só se $p(\alpha) = 0$ e $p'(\alpha) \neq 0$.

(B) α é raíz dupla de $p(X)$ se e só se $p(\alpha) = p'(\alpha) = 0$ e $p''(\alpha) \neq 0$.

(C) α é raíz de multiplicidade k $(k \leq n)$ de $p(X)$ se e só se

$$p(\alpha) = p'(\alpha) = \cdots = p^{(k-1)}(\alpha) = 0 \ \text{ e } \ p^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

(D) (Fórmula de Taylor) $p(X) = p(\alpha) + p'(\alpha)(X - \alpha) + \cdots + \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!}(X - \alpha)^n$.

---

17. Sejam X e Y dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, não vazios e arbitrários (limitados ou não). Definamos $X + Y = \{x + y : x \in X \text{ e } y \in Y\}$ e $-X = \{-x : x \in X\}$. Verifique:

(a) Se $X \subset Y$, então inf $Y \leq$ inf $X \leq$ sup $X \leq$ sup Y.

(b) Admita $x \leq y$, para arbitrários $x \in X$ e $y \in Y$. Prove $\sup X \leq \inf Y$.

(c) $\sup X + \sup Y = \sup(X + Y)$, onde $\sup X = +\infty$ se X ilimitado superiormente.

(d) $\inf(-X) = -\sup X$ e $\sup(-X) = -\inf X$.

18. Seja (x_n) uma sequência real (limitada ou não). Verifique as afirmações abaixo.

(a) $\liminf(-x_n) = -\limsup x_n$ e $\limsup(-x_n) = -\liminf x_n$.

(b) Suponha (x_n) limitada. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ para o qual temos $\liminf x_n - \epsilon \leq x_n \leq \limsup x_n + \epsilon$, para todo $n \geq N$.

(c) $\limsup x_n$ é valor de aderência de (x_n) , e é o maior valor de aderência.

(d) $\lim x_n = L \in [-\infty, +\infty]$ se e somente se $\liminf x_n = \limsup x_n = L$.

Dicas. Para (b), prove uma das desigualdades e use (a). Para (c) e (d), use (b).

19. Sejam (x_n) e (y_n) sequências limitadas em $\mathbb{R}$. Mostre que

$$\liminf x_n + \liminf y_n \leq \liminf(x_n + y_n) \leq \limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n.$$

As desigualdades afirmadas podem ser estritas. Dê exemplos.

20. Sejam (x_n) e (y_n) sequências em $\mathbb{R}$, com $\lim x_n = x \in \mathbb{R}$. Então, valem as identidades $\limsup(x_n + y_n) = x + \limsup y_n$ e $\liminf(x_n + y_n) = x + \liminf y_n$.

21. Seja (x_n) uma sequência real limitada. Verifique.

(a) $\inf\limits_{n\geq i} x_n \leq \inf\limits_{n\geq i+1} x_n \leq x_{i+j+1} \leq \sup\limits_{n\geq j+1} x_n \leq \sup\limits_{n\geq j} x_n$, para todos $i \in \mathbb{N}$ e $j \in \mathbb{N}$.

(b) $-\infty < \lim\limits_{i\to+\infty} \inf\limits_{n\geq i} x_n \leq \lim\limits_{j\to+\infty} \sup\limits_{n\geq j} x_n < +\infty$.

(c) Defina $m = \lim\limits_{i\to+\infty} \inf\limits_{n\geq i} x_n$ e $M = \lim\limits_{j\to+\infty} \sup\limits_{n\geq j} x_n$. Seja L um valor de aderência da sequência (x_n). Então, é válida a desigualdade $m \leq L \leq M$. Sugestão: considere uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergindo a L.

(d) Os números m e M são valores de aderência de (x_n).
Dica: $m_i = \inf\limits_{n\geq i} x_n, i \in \mathbb{N}$, é crescente e converge a m, e $m = \sup\{m_i : i \in \mathbb{N}\}$.

(e) Conclua que $\lim\limits_{i\to+\infty} \inf\limits_{n\geq i} x_n = \underline{\lim}\, x_n$ e $\lim\limits_{j\to+\infty} \sup\limits_{n\geq j} x_n = \overline{\lim}\, x_n$.

---

22. **(Weierstrass)** Seja K um conjunto compacto em $\mathbb{R}^n$ e $f : K \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que f assume máximo e mínimo sobre K.

23* Seja $f : \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty)$ contínua e tal que $f(X) \to +\infty$ se $|X| \to +\infty$. Mostre que f assume um valor mínimo absoluto em algum ponto X_0 no plano $\mathbb{R}^2$.

24* Todo conjunto aberto em $\mathbb{R}$ é reunião enumerável disjunta de intervalos abertos.

25* Defina continuidade uniforme para uma função $f : X \to \mathbb{R}$, com X contido em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$. Mostre que se X é compacto e f é contínua, então f é uniformemente contínua.

26** Seja $f : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, com $f(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ contínuas. Mostre que a função

$$\varphi(x) = \int_0^1 f(x,y)dy, \text{ onde } x \in [a,b],$$

é derivável, com derivada contínua (i.e., φ é de classe C^1), e

(Regra de Leibnitz) $$\varphi'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy, \text{ para todo } x \in [a,b]$$

Dica 1. As integrais citadas existem e

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \int_0^1 \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} dy.$$

Pelo TVM existe $\overline{x}$ entre x e $x+h$ tal que

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \int_0^1 f_x(x,y)dy = \int_0^1 \left[f_x(\overline{x},y) - f_x(x,y)\right] dy.$$

A função contínua f_x é uniformemente contínua e dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f_x(x_2,y_2) - f_x(x_1,y_1)| < \epsilon$ se $|(x_2,y_2) - (x_1,y_1)| < \delta$. Logo, supondo que o incremento h satisfaz $|h| < \delta$, temos $|f_x(\overline{x},y) - f_x(x,y)| < \epsilon$ e então $\left|\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} - \int_0^1 f_x(x,y)dy\right| < \epsilon$. Deduza então a fórmula na regra de Leibnitz. Por fim, utilizando que a função $f_x(x,y)$ é uniformemente contínua, conclua que a função $x \mapsto \int_0^1 f_x(x,y)dy$ é contínua.

Dica 2. Vide Spivak, Cálculo em Variedades, Editora Ciência Moderna, p. 71.