Prova de Recuperação de Cálculo Diferencial e Integral IV - MAT221

$2^{\underline{o}}$ semestre de 2008 - 02/02/2009

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Nome : ____________________*GABARITO*____________________

$N^{\underline{o}}$USP : ____

Professor : **Oswaldo Rio Branco de Oliveira**

Boa Sorte!

1. Determine se são convergentes ou divergentes.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ (b) $\displaystyle\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p\; ln\; p\; ln(ln\; p)}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\,,\ x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\right|, \alpha \in \mathbb{R}$

Sugestão: Em (d), determine os valores de α tal que a série convirja.

Vide 'Um Curso de Cálculo', vol 4, 5ª ed, p. 54, exercício 1 (j); p. 42, exercício 1 (e); p. 92, exemplo 2 ; p. 71 exercício 6 e notas de aula sobre série binomial.

Resolução

(a)

Comparando com a série divergente $\sum^{+\infty} \frac{1}{n}$ temos, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} = 1$ pois $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. Logo, pelo critério do limite, a série dada diverge.

(b)

Como $f(x) = \frac{1}{x\ln x \ln(\ln x)}$, x suficientemente grande, é contínua decrescente podemos aplicar o critério da integral. Ainda,

$$\int \frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}\,dx \;=\; \ln[\ln(\ln x)] + C\,,\ C \in \mathbb{R}\,,$$

e, $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}\,dx \;=\; \lim\limits_{x\to+\infty} \ln[\ln(\ln x)] \;-\; \ln 2 \;=\; +\infty$. Logo, a série diverge.

(c)

Pela fórmula trigonométrica,

$$sen x + sen 2x + ... + sen nx = \frac{cos\frac{x}{2} - cos(n+\frac{1}{2})x}{2sen\frac{x}{2}} \ , \ x \notin 2\pi\mathbb{Z} \ ,$$

temos,

$$| \ sen1 + sen2 + ... + senn \ | \leq \frac{1}{|sen\frac{1}{2}|} \ .$$

Logo, pelo critério de Dirichlet, como $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, a série converge.

(d)

Procurando aplicar o critério de Raabe encontramos, para $n > \alpha$,

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \ = \ \left|\frac{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}}{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}}\right| \ = \ |\frac{\alpha - n}{n+1}| \ = \ \frac{n-\alpha}{n+1} \ ,$$

$$\lim_{n\to+\infty} n(1 - \frac{n-\alpha}{n+1}) \ = \ \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}(\alpha+1) \ = \ \alpha + 1 \ .$$

Logo, a série converge se $\alpha + 1 > 1$ ($\alpha > 0$) e diverge se $\alpha + 1 < 1$ ($\alpha < 0$) ∎

2. (a) Expanda $f(x) = \operatorname{arctg} x$ em série de potências centrada em $x_0 = 0$ e determine uma série para $x = \dfrac{\pi}{4}$.

(b) Determine a série binominal para $f(x) = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$.

Resolução

(a) Vide exemplos clássicos em notas de aulas.
Lembrando $\arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ e a fórmula para a soma de uma PG temos,

$$1+r+r^2+......+r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \ ; \ \frac{1}{1+t^2} = 1-t^2+t^4+....+(-1)^n t^{2n}+(-1)^{n+1}\frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2} \ ,$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} .... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}\, dt \ , x \in \mathbb{R} \ .$$

Mostremos que para $|x| \le 1$ a integral tende a zero:

$$\left| (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}\, dt \ \right| \ \le \left| \int_0^x t^{2(n+1)}\, dt \right| \ \le \ \left| \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \right| \ \le \ \frac{1}{2n+3} \ \to \ 0 \ .$$

Concluímos então,

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} .... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ + ... , \ |x| \le 1 \ .$$

Logo, se $x = 1$, $\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$ e,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...(-1)^n \frac{1}{2n+1} + ... \ .$$

(b) Pela fórmula binomial, para $\alpha \notin \mathbb{Z}$,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \, , |x| < 1 \, , a_0 = 1 \, , a_n = \frac{\alpha(\alpha-1).....([\alpha-(n-1)]\,)}{n!} \, , n \ge 1 \ .$$

Logo, para $\alpha = \frac{1}{2}$ temos, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\frac{1}{2!}$, $a_3 = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\frac{1}{3!}$ e

$$a_n = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})....(-\frac{2n-3}{2})\frac{1}{n!} = (-1)^{n-1}\frac{1.3.5.....(2n-3)}{2^n}\frac{1}{n!} , \ \ n \ge 2.$$

Finalmente,

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \ = \ 1 \ + \ \frac{1}{2}x^2 + \sum_{n\ge 2}(-1)^{n-1}\frac{1.3.5.....(2n-3)}{2^n}\frac{1}{n!}x^{2n} \, , \ |x| < 1 \quad \blacksquare$$

3. (a) Determine a série de Fourier de $f(x) = x^2 + x$, $-\pi < x < \pi$.

(b) Compute $1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + \cdots$.

Resolução

(a) As funções x^2 e x são, respectiva/e, par e ímpar, e $sen\, nx$ anula-se em $\pi\mathbb{Z}$ e,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\, dx = \frac{2}{3}\pi^2 \ ,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left[x^2 \frac{sen nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \frac{sen nx}{n}\, dx \right] =$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n}\, dx \right] = \frac{4(-1)^n}{n^2} \ ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\, sen nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n}\, dx \right] =$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \ .$$

Logo, a série de Fourier de f é,

$$S[f](x) = \frac{1}{3}\pi^2 \ + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx \ + \ \frac{2(-1)^{n+1}}{n} sen\, nx \right] \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

(b) Como f é contínua e monótona por partes a série de Fourier de f converge pontualmente a f. Logo,

$$0 = f(0) = S[f](0) = \frac{1}{3}\pi^2 \ + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \ ,$$

e portanto,

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... \ = \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad \blacksquare$$

4. Determine a solução geral de

(a) $x'' - 4x = (1 + t + t^2)e^{2t}$

(b) $x''' - 5x'' + 3x' + 9x = t^5 e^{3t}$

Resolução

(a) O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - 4$, com raízes $\lambda = \pm 2$.
A solução geral da edo homogênea associada é : $x_h = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$, $c_1 , c_2 \in \mathbb{R}$.
Pela fórmula vista em aula existe uma solução particular $x_p = Q(t)e^{2t}$ tal que,

$$\frac{p''(2)}{2!}Q'' + \frac{p'(2)}{1!}Q' + \frac{p(2)}{0!}Q = Q'' + 4Q' = t^2 + t + 1 \ .$$

Pondo $y = Q'$ a edo $y' + 4y = t^2 + t + 1$ tem solução: $y = \frac{t^2}{4} + bt + c$; $b , c \in \mathbb{R}$.
Logo, $y' + 4y = (\frac{t}{2} + b) + (t^2 + 4bt + 4c) = t^2 + t + 1$. Identificando os coeficientes obtemos $\frac{1}{2} + 4b = 1$ e $b + 4c = 1$ e, portanto, $b = \frac{1}{8}$ e $c = \frac{7}{32}$.
Assim, $y = \frac{t^2}{4} + \frac{t}{8} + \frac{7}{32}$ e $Q = \frac{t^3}{12} + \frac{t^2}{16} + \frac{7t}{32}$.
A solução geral é ,

$$x_g = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + (\frac{t^3}{12} + \frac{t^2}{16} + \frac{7t}{32})e^{2t} , \quad c_1 , c_2 \in \mathbb{R} \ .$$

(b) O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1)$.
Solução geral da edo homogênea associada : $x_h = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} + c_3 e^{-t}$, $c_i' s \in \mathbb{R}$.
Pela fórmula demonstrada existe solução $x_p = Q(t)e^{3t}$ tal que

$$\frac{p'''(3)}{3!}Q''' + \frac{p''(3)}{2!}Q'' + \frac{p'(3)}{1!}Q' + \frac{p(3)}{0!}Q = t^5 \ .$$

Como $p' = 3\lambda^2 - 10\lambda + 3$, $p'' = 6\lambda - 10$ e $p''' = 6$ temos : $\mathbf{Q''' + 4Q'' = t^5}$.
Se $\mathbf{y = Q''}$, $\mathbf{y' + 4y = t^5}$ têm solução $y = \frac{t^5}{4} + at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$. Logo,

$$\begin{cases} y' = & 0t^5 + \ \frac{5}{4}t^4 + \ 4at^3 + \ 3bt^2 + \ 2ct + \ d \\ 4y = & t^5 + \ 4at^4 + \ 4bt^3 + \ 4ct^2 + \ 4dt + \ 4e \ , \\ y' + 4y = & t^5 \end{cases}$$

e então, $a = -\frac{5}{16}$, $b = \frac{5}{16}$, $c = -\frac{15}{64}$, $d = \frac{15}{128}$ e, por último, $e = -\frac{15}{512}$.
Assim, $y = \frac{t^5}{4} - \frac{5t^4}{16} + \frac{5t^3}{16} - \frac{15t^2}{64} + \frac{15t}{128} - \frac{15}{512}$ e $Q' = \frac{t^6}{24} - \frac{t^5}{16} + \frac{5t^4}{64} - \frac{5t^3}{64} + \frac{15t^2}{256} - \frac{15t}{512}$
e, ainda, $Q = \frac{t^7}{168} - \frac{t^6}{96} + \frac{t^5}{64} - \frac{5t^4}{256} + \frac{5t^3}{256} - \frac{15t^2}{1024}$.
A solução geral é:

$$x_g = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} + c_3 e^{-t} + (\frac{t^7}{168} - \frac{t^6}{96} + \frac{t^5}{64} - \frac{5t^4}{256} + \frac{5t^3}{256} - \frac{15t^2}{1024})e^{3t} , \quad c_i' s \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

5. Determine a solução geral de

$$x'' + 2x' + 2x = e^{\alpha t}\text{sen}\beta t \ ; \ \alpha, \beta \in I\!R.$$

Resolução

O pol. caract. é $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = (\lambda+1)^2 + 1$, com raízes $\lambda = -1 \pm i$.
Solução da edo homogênea associada: $x_h = c_1 e^{-t}\cos t + c_2 e^{-t} sen\, t, \quad c_1\,, c_2 \in \mathbb{R}$.

Se $\beta = 0$ a edo é homogênea e encerramos a verificação.
Supomos, abaixo, $\beta \neq 0$.
Como $e^{\alpha t}\text{sen}\beta t = Im\{\, e^{(\alpha + i\beta)t}\,\}$ e o problema dado é em $\mathbb{R}$, a parte imaginária de uma solução da edo complexa $x'' + 2x' + 2x = e^{(\alpha+i\beta)t}$ é solução da edo dada.
Assim, procurando uma solução particular $z_p(t) = Q(t)e^{\gamma t}\,, \gamma = \alpha + i\beta$, da edo complexa temos que $Q = Q(t)$ satisfaz, pela fórmula vista em aula,

$$(*) \qquad \frac{p''(\gamma)}{2!}Q'' + \frac{p'(\gamma)}{1!}Q' + \frac{p(\gamma)}{0!}Q \ = \ Q'' + p'(\gamma)Q' + p(\gamma)Q \ = \ 1\ .$$

Caso 1: $\gamma \neq -1 \pm i$ (γ não é raíz característica).
Então, $Q(t) = \frac{1}{p(\gamma)}$ resolve (*), $z_p = \frac{\overline{p(\gamma)}}{|p(\gamma)|^2}e^{\gamma t}$ é solução particular da edo complexa e $x_p \ = \ \frac{1}{|p(\gamma)|^2} Im\{\, p(\overline{\gamma})e^{\gamma t}\,\}$ é solução particular da edo dada.

Solução geral:

$$x_g \ = \ c_1 e^{-t}\cos t \ + \ c_2 e^{-t} sen\, t \ + \ \frac{1}{|p(\gamma)|^2} Im\{\, p(\overline{\gamma})e^{\gamma t}\,\}, \quad c_1\,, c_2 \in \mathbb{R}\ .$$

Caso 2: $\gamma = -1 + i$.
Esta raíz é simples e reescrevemos (*) como,

$$Q'' \ + \ 2iQ' = 1\ ,$$

que admite solução $Q' = \frac{1}{2i}$ e $Q = Q(t) = \frac{t}{2i} = -\frac{t}{2}\, i$.
Logo, $z_p = Q(t)e^{\gamma t} = -\frac{t}{2}\, i\, e^{\gamma t} = -\frac{t}{2} e^{-t}\, i\, e^{it}$ e $x_p(t) = Im\{\, z_p(t)\,\} = -\frac{t}{2}e^{-t}\cos t$.

Solução Geral:

$$x_g \ = \ c_1 e^{-t}\cos t \ + \ c_2 e^{-t} sen\, t \ - \ \frac{t}{2}e^{-t}\cos t\,, \quad c_1\,, c_2 \in \mathbb{R}\ .$$

Caso 3: $\gamma = -1 - i$.
Solução Geral:

$$x_g \ = \ c_1 e^{-t}\cos t \ + \ c_2 e^{-t} sen\, t \ + \ \frac{t}{2}e^{-t}\cos t\,, \quad c_1\,, c_2 \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$