Curso: MAT 221- CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Período: Segundo Semestre de 2008

LISTA DE EXERCÍCIOS 5 - SÉRIES DE FOURIER

1. Definimos sobre $\mathcal{R}[-\pi,\pi] = \{f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \mid f$ é integrável$\}$, o semi-produto interno,

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx\,, \quad f,g \in \mathcal{R}[-\pi,+\pi],$$

que o torna um espaço vetorial semi-normado com semi-norma, a semi-norma 2,

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f\rangle}.$$

2. O conjunto das funções complexas $\{\ \varphi_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\,, x \in [-\pi,\pi] : n \in \mathbb{Z}\ \}$ é **ortonormal**:

   (a) $\|\varphi_n\|_2 = 1,\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

   (b) $\langle \varphi_n\ ,\varphi_m\rangle = \delta_{nm}$, δ_{nm} o delta de Kronecker.

3. O conjunto $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,, \frac{sen\,nx}{\sqrt{\pi}}\,, \frac{cos\,nx}{\sqrt{\pi}}\,:\ n \in \mathbb{N}\}$ é **ortonormal** em $\mathcal{R}[-\pi,\pi]$:

   (a) $\int_{-\pi}^{\pi} cos\,nx\,dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} sen\,nx\,dx = 0$.

   (b) $\int_{-\pi}^{\pi} cos\,mx\,sen\,nx\,dx = 0$.

   (c) $\int_{-\pi}^{\pi} cos\,mx\,cos\,nx\,dx = \pi\delta_{nm}$.

   (d) $\int_{-\pi}^{\pi} sen\,mx\,sen\,nx\,dx = \pi\delta_{nm}$.

4. **Os coeficientes de uma série de Fourier** Verifique:

   (a) $2cos\,nx = e^{inx} + e^{-inx}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $2isen\,nx = e^{inx} - e^{-inx}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   (b) Dados a_n e b_n $(n \geq 1)$ em $\mathbb{C}$, existem c_n e c_{-n} (determine-os) em $\mathbb{C}$ tais que:

$$a_n cos\,nx + b_n sen\,nx = c_n e^{inx} + c_n e^{-inx}\ .$$

   (c) O polinômio trigonométrico $S_N = \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx}$ é real se, e só se, $\overline{c_n} = c_{-n}$.

   (d) Vale a relação: $2\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2)$

5. Para $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ [dica: compute as partes real e a imaginária da expressão em (a)],

   (a) $e^{it} + e^{2it} + e^{3it} + \ldots.. + e^{nit} = \frac{e^{nit}-1}{1-e^{-it}}$.

   (b) $\frac{1}{2} + cos\,t + cos\,2t + \ldots.. + cos\,nt = \frac{sen(n+\frac{1}{2})t}{2sen\frac{t}{2}}$ [**n-ésimo $\mathbb{R}$-núcleo de Dirichlet**].

   (c) $sen\,t + \ldots. + sen\,nt = \frac{cos\frac{t}{2} - cos(n+\frac{1}{2})t}{2sen\frac{t}{2}}$ [**n-ésimo $\mathbb{R}$-núcleo de Dirichlet conjugado**].

6. Mostre que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{cos\,nx}{n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sen\,nx}{n}$ convergem.
Sugestão: Utilize o exercício 5, acima, e o critério de Dirichlet.

7. Compute:

   (a) $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

   Sugestão: exercícios 9 e 10, lista 4. **A função zeta**, de Riemann, é dada por $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

8. Determine as séries de Fourier das funções abaixo.

   (a) $f(x) = -1$ se $-\pi \le x < 0$, $\quad f(x) = 1$ se $0 \le x \le \pi$.

   (b) $f(x) = x^3$ se $-\pi \le x \le \pi$.

   (c) $f(x) = x$, $-\pi \le x \le \pi$.

9. Compute F, a série de Fourier de f, de período 2π, e esboce seus gráficos.

   (a) $f(x) = 1$ se $-\pi \le x < -\frac{\pi}{2}$, $\quad f(x) = 2$ se $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ e $\quad f(x) = 1$ se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

   (b) $f(x) = 1$, se $-\pi \le x < 0$ e, $f(x) = 2$ se $0 \le x < \pi$.

10. Determine uma função contínua em $[-\pi, +\pi]$ que gere a série de Fourier $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{sen\, nx}{n^3}$.
    Compute então $\zeta(6) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$. Sugestão: Utilize a fórmula de Parsevall.

11. Encontre uma série de Fourier para computar, com a fórmula de Parsevall, $\zeta(4) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

12. Calcule a soma das séries abaixo via séries de Fourier.

    (a) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \cdots\cdots\cdots$ (b) $1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} \cdots\cdots\cdots$

13. Determine a série de Fourier de:

    (a) $f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}$. (b) $f(x) = x^2 + x$.

14. Determine uma expansão em série de senos, no intervalo $(0, \pi)$, para as funções,

    (a) $f(x) = 1$. (b) $f(x) = x^2 + x$.

15. Determine uma expansão em série de cossenos no intervalo $(0, \pi)$ para as funções,

    (a) $f(x) = sen\, x$. (b) $f(x) = x + 2\pi$.

16. Dada $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$, 2π-periódica, e $(c_n)_{\mathbb{Z}}$ **a família dos coeficientes de Fourier de f,** a **n-ésima soma parcial da série de Fourier de f** é $S_N(f; x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$. Verifique:

    (a) $D_N(x) = \sum_{-N}^{N} e^{inx} = \frac{sen(N+\frac{1}{2})x}{sen\,\frac{1}{2}x}$ [D_N é o **n-ésimo núcleo complexo de Dirichlet**].

    (b) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)dx = 1$.

    (b) $S_N(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-s) D_N(s)ds$.