$2^{\underline{a}}$ Prova de Cálculo Diferencial e Integral IV - MAT221

04.12.2008

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Nome : ____________________ GABARITO ____________________

$N^{\underline{o}}$USP : ____

Professor : **Oswaldo Rio Branco de Oliveira**

1. Determine para $\ddot{x} + 4x = e^t$ sen$t$.

   a) A solução geral.

   b) A solução tal que $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$.

Resolução

(a) Temos $p(\lambda) = \lambda^2 + 4 = (\lambda - 2i)(\lambda + 2i)$ e a solução geral da homogênea é

$$x_h = c_1 cos2t + c_2 sen2t \ , \ c_1, \ c_2 \in \mathbb{R}.$$

Existe solução particular na forma $x_p(t) = y(t)e^t$ com y solução de

$$\frac{p''(1)}{2!}y'' + \frac{p'(1)}{1!}y' + \frac{p(1)}{0!}y = y'' + 2y' + 5y = sent \ .$$

Procuremos solução na forma $y(t) = Acost + Bsent$. Logo,

$$\begin{cases} y' = -Asent + Bcost \\ y'' = -Acost - Bsent \ . \end{cases}$$

Substituindo temos,

$$(-Acost - Bsent) + 2(-Asent + Bcost) + 5(Acost + Bsent) = sent \ ,$$

$$(4A + 2B)cost + (4B - 2A)sent = sent \ ,$$

$4A + 2B = 0$ e $-2A + 4B = 1$. Logo, $A = -\frac{1}{10}$ e $B = \frac{2}{10}$.

Assim, para $x_p(t) = y(t)e^t$, a solução geral é, $x_G = x_h + x_p$,

$$x_G = c_1 cos2t + c_2 sen2t + (-\frac{cost}{10} + \frac{2sent}{10})e^t \ , \quad c_1 \, , c_2 \in \mathbb{R} \ .$$

(b) De $x_G(0) = 0$ obtemos $c_1 = \frac{1}{10}$ e, de $x'_G(0) = 0$, temos $c_2 = -\frac{1}{20}$. Logo,

$$x(t) = \frac{cos2t}{10} - \frac{sen2t}{20} + (-\frac{cost}{10} + \frac{2sent}{10})e^t \quad \blacksquare$$

2. Determine para $\dfrac{d^4}{dt^4} - x = t^2$.

   a) A solução geral.

   b) A solução tal que $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$

Resolução

(a) Temos, $p(\lambda) = \lambda^4 - 1 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - i)(\lambda + i)$. A solução geral da homogênea é,

$$x_h = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 cost + c_4 sent \ .$$

Obviamente existe uma solução particular polinomial, Q, grau$(Q) = 2$ e, assim, $Q^{(iv)} = 0$ e Q então satisfaz, $-Q = t^2$. A solução geral da não homogênea é:

$$x_G = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 cost + c_4 sent - t^2 \ .$$

(b) Temos,

$$\begin{cases} x_G = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 cost + c_4 sent - t^2 \\ x'_G = c_1 e^t - c_2 e^{-t} - c_3 sent + c_4 cost - 2t \\ x''_G = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - c_3 cost - c_4 sent - 2 \\ x'''_G = c_1 e^t - c_2 e^{-t} + c_3 sent - c_4 cost \end{cases} ,$$

e então, computando em $t = 0$,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 & = & 0 \\ c_1 - c_2 + c_4 & = & 0 \\ c_1 + c_2 - c_3 & = & 2 \\ c_1 - c_2 - c_4 & = & 0 \end{cases} .$$

Assim, $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = -1$, $c_4 = 0$ e

$$x_p(t) = \frac{e^t}{2} + \frac{e^{-t}}{2} - cost - t^2 \quad \blacksquare$$

3. Resolva a equação,
$$x''' - x'' + 4x' - 4x = t^2\text{sen}t$$

Resolução O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 4)$.
Solução geral da homogênea: $x_h = c_1e^t + c_2cos2t + c_3sen2t$, $c_i \in \mathbb{R}$.

A edo complexa $x''' - x'' + 4x' - 4x = t^2e^{it}$, têm uma solução $z_p = Q(t)e^{it}$, Q um polinômio em t, com coeficientes complexos, satisfazendo,

$$\frac{p'''(i)}{3!}Q''' + \frac{p''(i)}{2!}Q'' + \frac{p'(i)}{1!}Q' + \frac{p(i)}{0!}Q = t^2 \ .$$

Mas, $p(i) = 3i - 3$, $p'(\lambda) = 3\lambda^2 - 2\lambda + 4$, $p'(i) = 1 - 2i$, $p''(\lambda) = 6\lambda - 2$, $p''(i) = 6i - 2$, $p'''(\lambda) = 6$. Substituindo, Q satisfaz a edo complexa,

$$(*) \qquad Q''' + (3i - 1)Q'' + (1 - 2i)Q' + (3i - 3)Q = t^2 \ ,$$

a qual, é óbvio, tem como uma solução particular, um polinômio de grau 2, com coeficientes complexos. É claro que Q tem então a forma $Q(t) = \frac{1}{3i-3}t^2 + bt + c$.

Substituindo em (*), como $Q''' = 0$, temos,

$$(3i - 1)\frac{2}{3i - 3} \ + \ (1 - 2i)\left[\frac{2}{3i - 3}t + b\right] \ + \ (3i - 3)\left[\frac{t^2}{3i - 3} + bt + c\right] \ = \ t^2 \ .$$

Donde, $b = -\frac{2+i}{9}$ e $c = \frac{11+5i}{54}$.
Assim, $Q(t) = -\frac{1+i}{6}t^2 - \frac{2+i}{9}t + \frac{11+5i}{54} = (-\frac{t^2}{6} - \frac{2t}{9} + \frac{11}{54}) \ + \ i(-\frac{t^2}{6} - \frac{t}{9} + \frac{5}{54})$.

Para $z_p(t) = Q(t)e^{it}$ temos $P(\frac{d}{dt})\{ z_p(t) \} = t^2e^{it}$.
Para $x_p = Im\{ z_p \}$, temos $P(\frac{d}{dt})\{ x_p(t) \} = t^2sent$.
A soluçâo particular procurada é,

$$x_p = (-\frac{t^2}{6} - \frac{2t}{9} + \frac{11}{54})sent \ + \ (-\frac{t^2}{6} - \frac{t}{9} + \frac{5}{54})cost \qquad \blacksquare$$

4. Determine a solução geral de

$$x^{('v)} - 2x''' + 5x'' - 8x' + 4x = t^2e^t$$

Resolução

O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (\lambda - 1)^2(\lambda^2 + 4)$.
A solução geral da homogênea é

$$x_h = c_1e^t \ + \ c_2te^t \ + \ c_3cos2t \ + \ c_4sen2t \quad , \, c_i \in \mathbb{R}.$$

Existe uma solução particular $x_p = Q(t)e^{1t}$ [vide notas de aula] satisfazendo,

$$(E_Q) \qquad \frac{p^{(iv)}(1)}{4!}Q^{(iv)} \ + \ \frac{p'''(1)}{3!}Q''' \ + \ \frac{p''(1)}{2!}Q'' \ + \ \frac{p'(1)}{1!}Q' \ + \ \frac{p(1)}{0!}Q \ = \ t^2 \ .$$

Porém,

$$\begin{cases} p'(\lambda) & = \ 4\lambda^3 \ - \ 6\lambda^2 \ + \ 10\lambda \ - \ 8 \\ p''(\lambda) & = \ 12\lambda^2 \ - \ 12\lambda \ + \ 10 \\ p'''(\lambda) & = \ 24\lambda - 12 \\ p^{(iv)}(\lambda) & = \ 24 \quad , \end{cases}$$

$t = 1$ é raíz dupla, $p(1) = p'(1) = 0$, $p''(1) = 10$, $p'''(1) = 12$ e $p^{(iv)}(1) = 24$.
Substituindo tais valores em E_Q, a equação para Q, temos,

$$Q^{(iv)} \ + \ 2Q''' \ + \ 5Q'' \ = \ t^2 \ .$$

Substituindo $y(t) = Q''$ obtemos a equação

$$y'' \ + \ 2y' \ + \ 5y \ = \ t^2 \ ,$$

que admite solução polinomial $y(t) = at^2 \ + \ bt \ + \ c$.
É claro que $5a = 1$, $5b + 4a = 0$ e $5c + 2b + 2a = 0$; $a = \frac{1}{5}$, $b = -\frac{4}{25}$ e $c = -\frac{2}{125}$.
Portanto, $Q'' = y(t) = \frac{t^2}{5} \ - \ \frac{4t}{25} \ - \ \frac{2}{125}$ e podemos escolher,

$$Q(t) = \frac{t^4}{60} \ - \ \frac{2t^3}{75} \ - \ \frac{t^2}{125} \ .$$

Uma solução particular é $x_p(t) \ = \ Q(t)e^t$ e a solução geral é $x_G = x_h + x_p$,

$$x_G = c_1e^t \ + \ c_2te^t \ + \ c_3cos2t \ + \ c_4sen2t \ + \ t^2\left(\frac{t^2}{60} \ - \ \frac{2t}{75} \ - \ \frac{1}{125}\right)e^t \qquad \blacksquare$$

5. a) Determine uma expressão em série de cossenos, em $(0, \pi)$, para $f(x) = \text{sen} x$.

b) Compute a soma

$$\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \frac{1}{8^2-1} + \cdots$$

c) Compute o valor da série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^2-1} = \frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \frac{1}{8^2-1} + \cdots$$

Resolução

(a) Para f par, $f(x) = |sen\, x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$, os coeficientes de Fourier são:

$$b_n = 0, \qquad , \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} sen\, x\, cos\, nx\, dx.$$

Logo,

$$\frac{\pi a_n}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}[sen(1+n)x + sen(1-n)x]dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{cos\,(n+1)x}{n+1}\bigg|_0^{\pi} + \frac{cos(1-n)x}{1-n}\bigg|_0^{\pi}\right],$$

e assim,

$$-\pi a_n = \frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1} - \frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1} = [(-1)^{n+1}-1]\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right) =$$

$$= [(-1)^{n+1}-1]\frac{-2}{n^2-1}.$$

Então, $a_n = 0$ se n é ímpar, $a_n = -\frac{4}{\pi(n^2-1)}$, se n é par, e a série de Fourier de f é

$$|sen\, x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{cos\, 2p\, x}{(2p)^2-1}\ .$$

(b) Para $x = 0$ temos

$$0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1}......\right),$$

e então, $\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1}...... = \frac{1}{2}$.

(c) Para $x = \frac{\pi}{2}$ temos,

$$1 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p)^2-1},$$

e portanto, $\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p+1}}{(2p)^2-1} = \frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + ... = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ ■