$2^{\underline{a}}$ Prova de Cálculo Diferencial e Integral IV - MAT220
$2^{\underline{o}}$ semestre de 2011
26/10/2011

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Extra	
Total	

Nome : ____________GABARITO____________
$N^{\underline{o}}$USP : ________________________
Professor : **Oswaldo Rio Branco de Oliveira**

Escolha 5 entre as 6 primeiras questões
É necessário justificar todas as passagens.
Boa Sorte!

1. (2.0) Mostre que
$$\text{sen}^2 z \; + \; \cos^2 z \; = \; 1\,, \forall z \in \mathbb{C}\,.$$

Sugestões: As duas alternativas abaixo são eficientes.

(A) Utilize as expressões em séries para $\cos z$ e $\sin z$.

(B) Enuncie, **verifique**, e utilize as Fórmulas de Euler para $\cos z$ e $\sin z$.

1ª Resolução. A função $f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z$, $z \in \mathbb{C}$, é definida por uma série de potências convergente em todo o plano complexo pois $\sin z$, $z \in \mathbb{C}$, e $\cos z$, $z \in \mathbb{C}$, o são e o produto e a soma de séries de potências é uma série de potências.

Entretanto, sabemos que (pois já demonstramos)
$$f(x) - 1 = \text{sen}^2 x + \cos^2 x - 1 = 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,,$$
e portanto a série de potências para $f(z) - 1$ é igual à série de potências para a função nula em um conjunto com ponto de acumulação, a reta real. Logo, pelo Princípio de Identidade para Séries de Potências, a série de potências para a função $f(z) - 1\,, z \in \mathbb{C}$, é a nula e assim concluímos que $f(z) = 1\,, \forall z \in \mathbb{C}$.

Vide Segunda resolução na próxima página.

2ª Resolução. Verifiquemos antes as Fórmulas de Euler:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad\qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \ .$$

Temos,

$$e^{iz} = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} + ... + \frac{(iz)^n}{n!} + ...$$
$$e^{-iz} = 1 - iz - \frac{z^2}{2!} + i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - i\frac{z^5}{5!} + ... + \frac{(iz)^n}{n!} + ... \ .$$

Logo,

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + ... + (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} + ...\right) ,$$
$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + ... + (-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...\right) \ .$$

Donde seguem as identidades de Euler:

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} = \cos z \,,$$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sen} z \ .$$

Utilizando tais identidades obtemos:

$$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} \ + \ \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} \ = \ 1 \ .$$

2. (2.0) Mostre que
$$|\cos z|^2 + |\text{sen z}|^2 \;=\; 1 \;\Leftrightarrow\; z \in \mathbb{R}\ .$$

Sugestões: As duas alternativas abaixo são eficientes.

(A) Utilize as expressões em séries para $\cos z$ e $\sin z$.

(B) Enuncie, **verifique** e utilize, as Fórmulas de Euler para $\cos z$ e $\sin z$.

Particularmente, indico as expressões em séries.

1ª Resolução:

Pelas expressões em séries é óbvio que (1) $z \mapsto \cos z$ é par, isto é, $\cos(-z) = \cos z$, e (2) $z \mapsto \sin z$ é ímpar, isto é, $\sin(-z) = -\sin z$ e, devido à continuidade da função conjugação $z \mapsto \overline{z}$, temos (3) $\overline{\cos z} = \cos\overline{z}$ e (4) $\overline{\sin z} = \sin\overline{z}$

Ainda, fixado $x_0 \in \mathbb{R}$ temos $\cos(x_0 + y) - (\cos x_0 \cos y - \sin x_0 \sin y) = 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Logo, a função inteira

$$\mathbb{C} \ni w \mapsto \cos(x_0 + w) - (\cos x_0 \cos w - \sin x_0 \sin w)$$

se anula em $\mathbb{R}$ e, pelo Princípio dos Zeros Isolados, é a função nula sobre $\mathbb{C}$, qualquer que seja $x_0 \in \mathbb{R}$. Portanto, fixado $w_0 \in \mathbb{C}$, a função inteira

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \cos(z + w_0) - (\cos z \cos w_0 - \sin z \sin w_0)$$

se anula em $\mathbb{R}$ e, pelo Princípio dos Zeros Isolados, é a função nula sobre $\mathbb{C}$, qualquer que seja $w_0 \in \mathbb{C}$. Provamos então,

$$(*) \qquad \cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w\,, \forall z\,, \forall w \in \mathbb{C}\ .$$

Utilizando a identidade (*) temos que

$$\begin{aligned} |\cos z|^2 + |\sin z|^2 &= \cos z\,\overline{\cos z} + \sin z\,\overline{\sin z} = \cos z \cos\overline{z} + \sin z \sin\overline{z} \\ &= \cos z \cos(-\overline{z}) - \sin z \sin(-\overline{z}) = \cos(z - \overline{z})\ . \end{aligned}$$

Se $z = a + bi\,,\ a\,, b \in \mathbb{R}$, temos $z - \overline{z} = 2bi$ e

$$|\cos z|^2 + |\sin z|^2 \;=\; \cos(2bi) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2bi)^{2n}}{(2n)!} \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(i)^{2n}(2b)^{2n}}{(2n)!}.$$

Mas, $i^{2n} = (-1)^n$ e portanto,

$$|\cos z|^2 + |\sin z|^2 \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2b)^{2n}}{(2n)!} \;=\; 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2b)^{2n}}{(2n)!}.$$

Consequentemente, $|\cos z|^2 + |\sin z|^2 = 1 \Longleftrightarrow b = 0$.

2ª Resolução (de Gerson C. P. A. Pessotto) na próxima página

Pelas Fórmulas de Euler temos,

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad\qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \ ,$$

donde seguem,

$$\overline{\cos z} = \frac{e^{-i\overline{z}} + e^{i\overline{z}}}{2} \qquad\qquad \overline{\operatorname{sen} z} = \frac{e^{-i\overline{z}} - e^{i\overline{z}}}{-2i} \ .$$

Logo,

$$|\cos z|^2 + |\operatorname{sen} z|^2 = \cos z\overline{\cos z} + \operatorname{sen} z\overline{\operatorname{sen} z} =$$

$$= \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)\left(\frac{e^{-i\overline{z}} + e^{i\overline{z}}}{2}\right) \ + \ \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)\left(\frac{e^{-i\overline{z}} - e^{i\overline{z}}}{-2i}\right) =$$

$$= \frac{e^{i(z-\overline{z})} + e^{i(z+\overline{z})} + e^{-i(z+\overline{z})} + e^{-i(z-\overline{z})}}{4} \ + \ \frac{e^{i(z-\overline{z})} - e^{i(z+\overline{z})} - e^{-i(z+\overline{z})} + e^{-i(z-\overline{z})}}{4} =$$

$$= \frac{2e^{i(z-\overline{z})} + 2e^{-i(z-\overline{z})}}{4} \ .$$

Escrevendo $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, obtemos $\overline{z} = a - bi$ e

$$|\cos z|^2 + |\operatorname{sen} z|^2 = \frac{e^{-2b} + e^{2b}}{2} \ .$$

Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $e^x > 0$. Ainda, se $x \in \mathbb{R}$ temos $e^x \geq 1$ se e só se $x \geq 0$. Portanto, segue que

$$\frac{e^{-2b} + e^{2b}}{2} = 1 \iff b = 0 \ \iff z \in \mathbb{R} \ \blacksquare$$

3. (2.0) Verifique se são contínuas ou não as funções

$$(a) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx^3)}{n^4}\,, x \in \mathbb{R} \qquad ; \qquad (b) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{nx}}\,, x \in [1, +\infty)\ .$$

Resolução.

(a) Temos,

$$\frac{|\cos nx^3|}{n^4} \leq \frac{1}{n^4}\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,, \forall n \in \mathbb{N}\ .$$

Ainda mais,

$$\sum \frac{1}{n^4} < \infty\ .$$

Logo, pelo Teste-M de Weierstrass a série de funções

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx^3)}{n^4}$$

converge uniformememente sobre $\mathbb{R}$. Ainda mais, como a série é de funções contínuas e a convergência é uniforme, segue que a soma da série é uma função contínua em $\mathbb{R}$.

(b) Temos,

$$\frac{1}{2^{nx}} \leq \frac{1}{2^n}\,, \forall x \in [1, +\infty)\,, \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Ainda mais,

$$\sum \frac{1}{2^n} < \infty\ .$$

Logo, pelo Teste-M de Weierstrass a série de funções

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{nx}}\,,$$

converge uniformente sobre $[1, +\infty)$. Como a série é de funções contínuas (pois, $\frac{1}{2^{nx}} = e^{-nx\log 2}$ é uma função contínua, $\forall n \in \mathbb{N}$) e a convergência é uniforme, segue que a soma da série é uma função contínua em $[1, +\infty)$ ■

4. (2.0) Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{x^2+n^2}$. Demonstre que

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) .$$

Resolução. É claro que $f_n(x) = \frac{x}{x^2+n^2}$, $n \geq 1$, é uma sequência de funções contínuas.

É também claro que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{x}{x^2+n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \forall x \in [0,1].$$

Então, como a série $\sum \frac{1}{n^2}$ é convergente, pelo Teste-M de Weierstrass, a série dada (de funções contínuas) converge uniformemente à função contínua $f(x)$, $x \in [0,1]$

Ainda, pelo Teorema da Integração termo a termo segue,

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x}{x^2+n^2}dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(x^2+n^2)}{2}\Big|_0^1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \blacksquare$$

5. Seja $p \in \mathbb{N}^*$.

   (a) (0,5) Determine o disco de convergência $D(0;\rho)$ da série

$$B(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/p}{n} z^n \ .$$

   (b) (1,5) Mostre que é válida a identidade

$$B(z)^p = 1 + z \, , \quad \text{para todo } z \in D(0;\rho) \ .$$

Resolução.

(a) Pondo $\alpha = 1/p$ e $a_n = \binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha ... (\alpha - n + 1)}{n!}$ temos,

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\alpha ... (\alpha - n)}{(n+1)!} \frac{n!}{\alpha ... (\alpha - n + 1)} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\alpha - n}{n+1} \right| = 1 \ .$$

Portanto, o raio de convergência da série de potências dada é $\rho = 1$.

(b) Pelo Teorema Binomial temos que,

$$b(x) \ = \ (1+x)^{\frac{1}{p}} \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/p}{n} x^n \, , \quad \forall x \in (-1,1) \ .$$

Pelo Teorema para o Produto de Séries de Potências, a função $B(z)^p$ é uma série de potências convergente em $D(0;1)$. Ainda mais,

$$B(x)^p \ = \ b(x)^p \ = \ 1 + x \, , \ \forall x \in (-1,1) \ .$$

Portanto, pelo Princípio de Identidade para Séries de Potências segue:

$$B(z)^p = 1 + z \, , \quad \forall z \in D(0;1) \quad \blacksquare$$

6. (2.0) Mostre que a Desigualdade de Gutzmer-Parseval para Polinômios implica o Princípio do Módulo Máximo para Polinômios.

Resolução. Seja $P(z)$ um polinômio tal que existe z_0 um ponto de máximo local de $|P(z)|$. Isto é, existe $R > 0$ tal que

$$|P(z)| \ \leq \ |P(z_0)|\,, \quad \forall z \in \overline{D}(z_0; R)\ .$$

Mostremos que $P(z) = P(z_0)\,, \forall z \in \mathbb{C}$.

Analizando $P(z) = P(z + z_0)$ vemos que podemos supor, sem perda de generalidade, $z_0 = 0$. Assim sendo, suponhamos que

$$|P(z)| = |a_0 + ... + a_n z^n| \leq |a_0|\,,\ \forall z \in \overline{D}(0; R)\ .$$

Logo, pela Desigualdade de Gutzmer-Parseval,

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 r^2 + ... + |a_n|^2 r^{2n} \ \leq |a_0|^2\,,\ \forall r \in [0, R]\ .$$

Donde evidentemente segue $a_1 = ... = a_n = 0$ e $P(z) = a_0\,, \forall z \in \mathbb{C}$ ■

extra. (2.0) Seja $P(z) = a_0 + a_1 z + ...a_n z^n$ um polinômio complexo de grau $n \geq 1$.

(a) Enuncie o Teorema da Aplicação Aberta (TAA) para Polinômios.

(b) Verifique que $\lim\limits_{|z|\to+\infty} |P(z)| = +\infty$ e que $|P(z)|$ tem um mínimo absoluto.

(c) Mostre que o TAA p/ polinômios implica o Princípio do Módulo Mínimo p/ polinômios.

(d) Prove o TFA utilizando o TAA para polinômios.

Atenção: Não é necessário provar o TAA para polinômios.

Resolução.

(a) Seja $P(z)$ um polinômio não constante e Ω aberto em $\mathbb{C}$. Então,

$$P(\Omega) \text{ é aberto em } \mathbb{C}\ .$$

(b) Seja $P(z) = a_n z^n + ...a_1 z + a_0$ um polinômio, grau$(P) = n \geq 1$. Verifique:

$$\lim_{|z|\to+\infty} |P(z)| \ \geq \ \lim_{|z|\to+\infty} |a_n||z|^n - |a_0| - ... - |a_{n-1}||z|^{n-1} = +\infty\ .$$

Donde, existe $R > 0$ tal que $|P(z)| > |P(0)| + 1$ se $|z| > R$.

Como a função $|P|$ é contínua, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe um ponto z_0 no disco compacto $\overline{D}(0; R)$ tal que

$$|P(z_0)| \ = \ \min_{\overline{D}(0;R)} |P(z)| \ \leq |P(0)|\ .$$

Ainda mais, como em $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0; R)$ temos $|P(z)| > |P(0)| + 1$, segue que

$$|P(z_0)| \ \leq \ |P(z)|\,,\ \forall z \in \mathbb{C}\ .$$

(c) Seja $P(z) = a_0 + a_1 + ... + a_n z^n$, grau$(P) = n \geq 1$, um polinômio não cte. Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ e $R > 0$ satisfazendo (z_0 é um ponto de mínimo local)

$$|P(z_0)| \ \leq |P(z)|\,,\ \forall z \in D(z_0; R)\ .$$

Pelo TAA p/ polinômios, $P(\,D(z_0; R)\,)$ é aberto. Logo, existe $r > 0$ tal que

$$D(P(z_0); r) \subset P(\,D(z_0; R)\,)\ .$$

Então, se $P(z_0) \neq 0$, podemos escolher (**esboce**)

$$w \in D\Big(P(z_0); r\Big) \ \text{ tal que } \ |w| < |P(z_0)|.$$

Assim, como também temos $w \in P(\mathbb{C})$, segue que

$$w = P(w_0)\,, \ \text{ para algum } \ w_0\,, \ \text{ e } \ |P(z_0)| \leq |P(w_0)| = |w| \ \ ↯$$

Assim, mostramos que $P(z_0) = 0$ e concluímos a prova desejada.

(d) **FINALIZE** ∎