MAT 220 - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV (IFUSP)
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Segundo Semestre de 2011

6 LISTA DE EXERCÍCIOS

Para entregar: 6, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22 e 23

1. Para cada um dos conjunto abaixo, sua fronteira é descrita por uma curva suave por partes. Esboce o conjunto, sua fronteira e dê uma aplicação que a descreva.

   (a) $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, \mathrm{Re}(z) \geq \frac{1}{2}$.

   (b) $V = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} \leq |z| \leq 1,\ \mathrm{Re}(z) \geq\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$.

   (c) $V = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{3} \leq |z| \leq 1,\ \mathrm{Re}(z) \geq\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$.

2. Calcule $\int_{\partial V} f$, com V cada um dos conjuntos do exer. 2 (V e ∂V positiva/e orientados) e
$$f(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \quad , \quad f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) .$$

3. Seja V como no enunciado do Teorema de Green. Mostre que a área de V é dada por
$$\int_{\partial V} xdy \ .$$

4. Use (3) para calcular a área de
$$V = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\} \quad \text{e} \quad V = \left\{(x,y) : 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9,\ 1 \leq xy \leq 4\right\} .$$

5. Calcule (V e ∂V positiva/e orientados)
$$\int_{\partial V} (x^2-y^2)dx + 2xydy \quad \text{e} \quad \int_{\partial v} 2xydx + (y^2-x^2)dy \ ,$$
onde V é

   (i) O retângulo delimitado pelas retas $y = x$, $y = -x+4$, $y = x+2$ e $y = -x$.

   (ii) $V = \{(x,y) : 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9, 1 \leq xy \leq 4\}$.

6. Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ é derivável em z_0 e se $\tilde{f} = \big(u(x,y), v(x,y)\big)$ é a identificação usual com f através do isomorfismo natural entre $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$ mostramos
$$J(\tilde{f}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) \end{bmatrix} ,$$
a forma matricial das equações C-R . Lembe que já vimos que
$$z = a + bi \equiv \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} .$$

7. Dada $f : \Omega \to \mathbb{C}$, Ω aberto em $\mathbb{C}$, seja $\tilde{f}(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big)$ com a notação acima e suponhamos $\tilde{f}$ diferenciável [logo, existem $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$].

(a) Escrevendo,

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad , \quad y = \frac{z - \overline{z}}{2i} \,,$$

$$f = u(x,y) + iv(x,y) = u\Big(\frac{z + \overline{z}}{2}, \frac{z - \overline{z}}{2i}\Big) \; + \; iv\Big(\frac{z + \overline{z}}{2}, \frac{z - \overline{z}}{2i}\Big),$$

desenvolva, utilizando a regra da cadeia, as fórmulas (memorize-as) para

$$\frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \,,$$

em termos das derivadas parciais das funções a valores reais u e v, em relação às variáveis reais x e y.

(b) Mostre que $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ se e só se valem as equações de C-R (equações de Cauchy-Riemann: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

(c) Mostre que valem as equações de C-R se e somente se $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.

(d) Interprete o resultado em (c).

8. Verifique se se cumprem as condições $C - R$ para as seguinte funções

(i) $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

(ii) $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \sin x)$.

(iii) $f(z) = e^{-x}(cosy - i \sin y)$

(iv) $f(z) = e^{y}(\cos x + i \sin x)$.

9. Seja $f(z)$ uma função inteira (holomorfa em todo o plano complexo). Mostre que a função $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ também é inteira. Mostre, ainda, que a função $h(z) = \overline{f(z)}$ é derivável em $z_0 = 0$ se e somente se $f'(0) = 0$.

10. Compute as derivadas e expresse na forma $u + iv$ o seno e o co-seno hiperbólicos:

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \quad , \quad \sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \,.$$

11. Identifique o erro no Paradoxo de Bernoulli:

$$(-z)^2 = z^2 \Rightarrow 2\log(-z) = 2\log z \Rightarrow \log(-z) = \log z \quad .$$

12. Usando o ramo principal de z^λ calcule $2^{\sqrt{2}}$, $(5i)^{1+i}$ e 1^i e 1^{-i}.

13. Determine o ramo principal da função $\sqrt{z-1}$.

14. Prove o Teorema de Liouville para $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, utilizando a Fórmula Integral de Cauchy.

15. Se f é uma função inteira (holomorfa em $\mathbb{C}$) e existem $M \geq 0$, $R > 0$ e $n \geq 1$ tais que $|f(z)| \leq M|z|^n$ para $|z| \geq R$, mostre que f é um polinômio de grau menor ou igual a n.

16. Compute $\int_\gamma f(z)\,dz$ onde f e γ são dados.

(a) $f(z) = z\overline{z}$ e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(b) $f(z) = \frac{z+1}{z}$ e $\gamma(t) = 3e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(c) $f(z) = \frac{z+1}{z}$ e $\gamma(t) = 5i + e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(d) $f(z) = \frac{1}{z^2-2}$ e $\gamma(t) = 2 + e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(e) $f(z) = \frac{1}{z^2-2}$ e $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(f) $f(z) = \pi e^{\pi\overline{z}}$ e γ é o quadrado de vértices 0, 1, $1+i$ e i, positivamente orientado.

(g) $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ e $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, $r > 0$.

(h) $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n}$ e $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, $r > 0$, $n \ge 2$.

(i) $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2}$ e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(j) $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$ e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(k) $f(z) = \frac{\log z}{z^n}$ e $\gamma(t) = 1 + \frac{1}{4}e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(l) $f(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{z^n}$ e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, $n \ge 1$.

(m) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ e $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

17. Mostre que $\int_\gamma \frac{e^{kz}}{z}\,dz = 2\pi i$, onde k é uma constante real e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Use esse resultado para mostrar que

$$\int_0^\pi e^{k\cos t}\cos(k\sin t)\,dt = \pi \ .$$

18. Prove o Princípio do Módulo Máximo, para $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, com a Fórmula Integral de Cauchy.

19. Prove o Princípio do Módulo Mínimo, para f holomorfa em Ω.

20. Seja f holomorfa num domínio Ω contendo a região fechada e limitada determinada por uma curva de Jordan suave por partes γ e z um ponto interior a esta região. Se K é o máximo de $|f|$ ao longo de γ e δ é a distância mínima de z a γ então,

$$|f(z)| \le K\Big(\frac{L(\gamma)}{2\pi\delta}\Big)^{\frac{1}{n}} \quad , \quad L(\gamma) \text{ o comprimento de } \gamma\,, \ \forall n \ge 1 \ .$$

Aplique tal desigualdade para dar uma outra prova do Princípio do Módulo Máximo.

21. Identidade de Parsevall: Se $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, $\forall z \in D_\rho(z_0)$, e se $r < \rho$, então

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta}|^2 d\theta = \sum |a_n|^2 r^{2n} \ .$$

Aplicando tal identidade, dê uma outra prova do Princípio do Módulo Máximo.

22. Princípio da Identidade para Funções Holomorfas Sejam f e g holomorfas num domínio Ω. Se $X = \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ tem ponto de acumulação em Ω, então $f \equiv g$.

23. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa e tal que existe $\lim_{z\to\infty} f(z)$. Então, f é constante.