MAT 220 - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV (IFUSP)
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Segundo Semestre de 2011

4ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1ª Parte: Exercícios sobre o Capítulo 6.

1. Suponha que a série $\sum^{+\infty} a_n$ converge absolutamente. Mostre que também convergem absolutamente as séries

$$(a)\ \ \sum a_n^2 \qquad (b)\ \ \sum \frac{a_n}{1+a_n}\,,\ \text{se } a_n \neq -1\,, \forall n \in \mathbb{N}\,, \qquad (c)\ \ \sum \frac{a_n^2}{1+a_n^2}\ .$$

2. Mostre que converge condicionalmente a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + i\frac{1}{n^2} \right] .$$

3. Sejam $(a_i)_I$ e $(b_j)_J$ duas famílias somáveis (I e J enumeráveis). Mostre

$$\Big(\sum a_i \Big) \Big(\sum b_j \Big) \ = \ \sum a_i b_j \ .$$

4. Compute, para $|z| < 1$,

$$1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \ldots \ .$$

5. Seja $a_{mn} = \frac{(-1)^{m+n}}{mn}$, com $m, n \in \{1, 2, \ldots\}$. Mostre que não existe

$$\sum_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{mn} \ .$$

Porém, existem

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} a_{mn}\,, \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn} \ .$$

6. Roteiro para uma prova muito simples e muito fácil de que dadas $\sum^{+\infty} a_n = \alpha$ e $\sum^{+\infty} b_n = \beta$, duas series absolutamente convergentes, então o produto de Cauchy, $\sum^{+\infty} c_p$, com $c_p = \sum_{n+m=p} a_n b_m$, satisfaz $\sum^{+\infty} c_p = \alpha\beta$.

(a) Suponha a_n e b_n positivos para todo $n \in \mathbb{N}$. Sejam s_N e t_N as N-ésimas somas parciais das séries $\sum^{+\infty} a_n = \alpha$ e $\sum^{+\infty} b_n = \beta$. Verifique:

$$s_N t_N \ = \ (a_0 + \ldots + a_N)(b_0 + \ldots + b_N) \ \leq \ c_0 + c_1 + \ldots + c_{2N} \ \leq \ s_{2N} t_{2N} .$$

Conclua que $\sum_{p=0}^{+\infty} c_p = \alpha\beta$ (note que $c_p \geq 0\,,\ \forall p$).

(b) Suponha $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sejam (p_n) e (q_n) as respectivas sequências das partes positivas e negativas de a_n, $n \in \mathbb{N}$, e (P_m) e (Q_m) as respectivas sequências das partes positivas e negativas de b_m, $m \in \mathbb{N}$. Portanto temos $a_n = p_n - q_n$ e $b_m = P_m - Q_m$. Então, desenvolvendo e aplicando (a) obtemos

$$\begin{aligned}
\Big(\sum^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} b_m\Big) &= \Big(\sum^{+\infty} p_n - \sum^{+\infty} q_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} P_m - \sum^{+\infty} Q_m\Big) \\
&= \Big(\sum^{+\infty} p_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} P_m\Big) - \Big(\sum^{+\infty} p_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} Q_m\Big) \\
&\quad -\Big(\sum^{+\infty} q_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} P_m\Big) + \Big(\sum^{+\infty} q_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} Q_m\Big) \\
&= \sum^{+\infty}\Big(\sum_{n+m=p} p_n P_m\Big) - \sum^{+\infty}\Big(\sum_{n+m=p} p_n Q_m\Big) \\
&\quad - \sum^{+\infty}\Big(\sum_{n+m=p} q_n P_m\Big) + \sum^{+\infty}\Big(\sum_{n+m=p} q_n Q_m\Big) \\
&= \sum^{+\infty}\Big[\sum_{n+m=p}\big(p_n P_m - p_n Q_m - q_n P_m + q_n Q_m\big)\Big] \ldots .
\end{aligned}$$

(c) Desenvolva o caso em que $\sum^{+\infty} z_n$ e $\sum^{+\infty} w_m$ são séries complexas absolutamente convergentes.

Sugestões:

(1) Utilize as notações $z_n = a_n + ib_n$, com a_n e b_n em $\mathbb{R}$, e $w_m = c_m + id_m$ com c_m e d_m em $\mathbb{R}$.

(2) Devido às desigualdades

$$|a_n| \le |z_n|, \ |b_n| \le |z_n|, \ |c_m| \le |w_m| \ \text{ e } \ |d_m| \le |w_n|,$$

as séries $\sum^{+\infty} a_n$, $\sum^{+\infty} b_n$, $\sum^{+\infty} c_m$ e $\sum^{+\infty} d_m$ convergem absolutamente.

(3) Desenvolvendo e aplicando o item (b) escreva

$$\begin{aligned}
\Big(\sum^{+\infty} z_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} w_m\Big) &= \Big(\sum^{+\infty} a_n + i\sum^{+\infty} b_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} c_m + i\sum^{+\infty} d_m\Big) = \\
&= \Big(\sum^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} c_m\Big) - \Big(\sum^{+\infty} b_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} d_m\Big) \\
&\quad + i\Big(\sum^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} d_m\Big) + i\Big(\sum^{+\infty} b_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} c_m\Big) \\
&= \sum^{+\infty}\Big(\sum_{n+m=p} a_n c_m\Big) - \sum^{+\infty}\Big(\sum_{n+m=p} b_n d_m\Big) \ldots .
\end{aligned}$$

7. Mostre que $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1,\ \forall z \in \mathbb{C}$.

Sugestão: Utilize as definições (por séries) das funções $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$.

8. Verifique a fórmula, onde N é ímpar e $z, w \in \mathbb{C}$.

$$(z+w)^N = \sum_{2n+1+2m=N} \left[\binom{N}{2m} z^{2n+1} w^{2m} \ + \ \binom{N}{2n+1} z^{2m} w^{2n+1} \right] .$$

Sugestões: (1) Teste o caso $N = 5$. (2) Troque a notação N ímpar por $2N+1$, se preferir.

9. Verifique a fórmula, para z e w arbitrários em $\mathbb{C}$,

$$\operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w = \operatorname{sen}(z+w) \ .$$

Sugestão: utilize as definiçoes (por séries) para as funções $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$ e o Exercício 8.

10. Dado $\theta \in \mathbb{R}$, verifique a validade das definições de Euler para as funções trigonométricas:

$$cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad , \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \ .$$

$2^{\underline{a}}$ Parte: Exercícios sobre o Capítulo 7.

11. Determine o domínio de convergência da série e esboce o gráfico de f:

(a) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ (b) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$

12. Determine o limite $f(x) = \lim f_n(x)$, $\forall x \in X$, e mostre que a sequência (f_n) não converge uniformemente a f, nos casos abaixo.

(a) $f_n(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{1+n^2x^2}$, $X = \mathbb{R}$. Dica: analise o que ocorre nos pontos $x_n = \frac{\pi}{2n}$.

(b) $\frac{n}{x+n}$, $X = [0, +\infty)$. Dica: analise o que ocorre nos pontos $x_n = n$.

(c) $f_n(x) = \left(\frac{\text{sen} x}{x}\right)^n$, se $x \neq 0$ e $f_n(0) = 1$, onde $X = \mathbb{R}$.

(d) $f_n(x) = (1 - 2nx^2)e^{-nx^2}$, com $X = \mathbb{R}$.

(e) $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$, com $X = \mathbb{R}$.

(f) $X = [0, 1]$ e

$$f_n(x) = \begin{cases} (n-1)x\,, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 - x\,, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1\,. \end{cases}$$

13. Mostre a convergência uniforme de (f_n) em $X \subset \mathbb{R}$ nos casos abaixo.

(a) $f_n(x) = \frac{\text{sen} nx}{n^7}$, onde $X = \mathbb{R}$.

(b) $f_n(x) = e^{-nx} \sin x$, onde $X = [0, +\infty)$.

(c) $f_n(x) = xe^{-nx^2}$, onde $X = \mathbb{R}$.

14. Determine o limite $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$, onde $x \in [0, 1]$, e mostre que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \Big(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\Big)dx\,, \quad \text{supondo}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x\,, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2^n}\,, \\ n^2(\frac{1}{n} - x)\,, & \frac{1}{2^n n} \leq x \leq \frac{1}{n}\,, \\ 0\,, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1\,. \end{cases}$$

15. Sendo $f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}$, $x \in [-1, 1]$, mostre que f_n converge simplesmente a f (determine f) mas não uniformemente. Ainda assim,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^1 f_n(x)dx = \int_{-1}^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx\,.$$

16. Para cada $n \geq 1$, seja $f_n(x) = \frac{nx}{nx^2+1}, x \in \mathbb{R}$. Consideremos $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

(a) Determine o domínio de convergência da sequência (f_n). Esboce os gráficos de f e das funções f_n.

(b) A convergência da sequência (f_n) à função f é uniforme sobre $\mathbb{R}$? E sobre o intervalo $[r, +\infty), r > 0$?

17. Para cada $n \geq 1$, seja $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^4}, x \in \mathbb{R}$. Consideremos $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

(a) Determine o domínio de convergência. Esboce os gráficos de f e das funções f_n.

(b) A convergência é uniforme sobre $[0,1]$? Justifique.

(d) Mostre que $\int_0^1 [\lim_{n\to+\infty} f_n(x)]\, dx \neq \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

18. Mostre que a série dada converge uniformemente no intervalo dado.

(a) $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ em $[-r, r], r > 0$.

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$, em $[-r, r], 0 < r < 1$.

19. Mostre que a função dada é contínua.

(a) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx^3}{n^4}$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{nx}}$, $x \in [1, +\infty)$.

20. Sejam $(a_n)_{n\geq0}$ e $(b_n)_{n\geq1}$ duas sequências em $\mathbb{R}$. Suponhamos que

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [\, a_n \cos nx + b_n \text{sen}\, nx\,], \quad x \in [-\pi, +\pi],$$

a convergência sendo uniforme. Mostre que:

(i) $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(x) \cos nx\, dx\,, \forall\, n \geq 0.$

(ii) $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(x) \text{sen}\, nx\, dx\,, \forall\, n \geq 1,$

A série é acima é a série de Fourier de F e os números $a_n, n \geq 0$, e $b_n, n \geq 1$, são os coeficientes de Fourier de F.

21. Determine os coeficientes de Fourier de

(a) $f(x) = x^2,\ -\pi \leq x \leq \pi.$

(b) $f(x) = |x|,\ -\pi \leq x \leq \pi.$