

MAT 220 - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV

Unidade: IFUSP

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Período: Segundo Semestre de 2011

2 LISTA DE EXERCÍCIOS

P/ entregar: exercícios 1, 3, 4, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 20, 21, 22 e 30, numerados em negrito.

1. Determine $\sup X$, $\inf X$, $\max X$ e $\min X$ em cada um dos seguintes casos:

- a) $X =]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$ ou $[a, b]$; com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$.
- b) $X =]-\infty, a]$, $[a, +\infty[$, $] -\infty, a[$ ou $X =]a, +\infty[$; com $a \in \mathbb{R}$.
- c) $X = \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $X = \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

2. Sejam X e Y dois subconjuntos não vazios de \mathbb{R} , com $X \subset Y$. Prove que

$$\inf Y \leq \inf X \leq \sup X \leq \sup Y .$$

3. Seja X e Y subconjuntos não vazios e limitados em \mathbb{R} . Definamos o conjunto $X + Y = \{x + y : x \in X \text{ e } y \in Y\}$. Verifique as afirmações:

- (a) $X + Y$ é limitado
- (b) $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$
- (c) $\inf(X + Y) = \inf X + \inf Y$.

4. Sejam X e Y dois subconjuntos não vazios e arbitrários em \mathbb{R} . Então vale,

$$\sup X + \sup Y = \sup(X + Y) ,$$

com a convenção $\sup X = +\infty$ se X não é majorado superiormente.

Atenção: este resultado é importante no capítulo 6.

5. Sejam X e Y subconjuntos não vazios de \mathbb{R} tais que: $x \leq y$, $\forall x \in X$ e $\forall y \in Y$. Mostre que:

- a) $\sup X \leq \inf Y$.
- b) $\sup X = \inf Y$ se e só se, $\forall \epsilon > 0$ existem $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $y - x < \epsilon$. Sugestão: No item (b), use a Propriedade de Aproximação.

6. Seja X um subconjunto não vazio de \mathbb{R} . Suponha que X é limitado inferiormente e defina $-X = \{-x \mid x \in X\}$. Verifique que o conjunto $-X$ é limitado superiormente e que $\sup(-X) = -\inf X$.

7. Seja X um subconjunto não vazio e limitado em \mathbb{R} . Dado $c \in \mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$, mostre que o conjunto $cX = \{cx \mid x \in X\}$ é limitado e

$$\sup(cX) = c \sup X \quad \text{e} \quad \inf(cX) = c \inf X .$$

Enuncie e verifique o que ocorre se $c < 0$.

8. Sejam X e Y subconjuntos não vazios e limitados em $\mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$. Defina $X \cdot Y := \{xy \mid x \in X \text{ e } y \in Y\}$. Mostre que $X \cdot Y$ é limitado e que

$$\sup(X \cdot Y) = \sup X \sup Y \quad \text{e} \quad \inf(X \cdot Y) = \inf X \inf Y .$$

9. Calcule, caso exista, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ para

(a) $a_n = \frac{n^3 + 3n + 1}{4n^3 + 2}$.

(b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

(c) $a_n = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx, \alpha \geq 1$.

(d) $a_n = \int_0^n \frac{1}{1+x^2} dx$.

(e) $a_n = \frac{n+1}{\sqrt[3]{n^7 + 2n + 1}}$.

(f) $a_n = \operatorname{sen} \frac{1}{n}$.

(g) $a_n = n \operatorname{sen} \frac{1}{n}$.

(h) $a_n = \frac{1}{n} \operatorname{sen}(n)$.

10. Sejam (x_n) e (y_n) seqüências limitadas em \mathbb{R} . Mostre que

(a) $\liminf x_n + \liminf y_n \leq \liminf(x_n + y_n)$

(b) $\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$

(c) $\liminf(-x_n) = -\limsup x_n$ e $\limsup(-x_n) = -\liminf x_n$.

Ainda mais, se $x_n \geq 0$ e $y_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, então

(d) $(\liminf x_n)(\liminf y_n) \leq \liminf(x_n y_n)$

(e) $\limsup(x_n y_n) \leq (\limsup x_n)(\limsup y_n)$.

11. Mostre que a seqüência $\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$ é convergente a 2.

12. Calcule:

(a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^n$

(b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \quad (x \in \mathbb{R})$

(c) $\lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \quad (x \in \mathbb{R})$

13. Suponha que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$. Verifique que:

(a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$.

(b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = a, \quad \text{se } a > 0 \text{ e } a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}.$

Sugestão: Em (b) utilize (a).

14. Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ para

$$(a) \quad a_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}{n} \qquad (b) \quad a_n = \frac{2 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{2} + \dots + \sqrt[n]{2}}{n} .$$

Sugestão: Utilize o exercício 13.

15. Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ para $a_n = \frac{1}{(n \log^2 n)^p}$, $n \geq 2$, $p \in \mathbb{R}$.

16. Sejam $a > 0$ e $b > 0$. Mostre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max(a, b) .$$

17. Calcule os limites da razão, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, e da raiz, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$, ou pelo menos um deles, em cada um dos casos abaixo.

$$(a) \quad a_n = \frac{n!}{n^n} \qquad (b) \quad a_n = n$$

$$(c) \quad a_n = \frac{1}{n^p}, p \in \mathbb{R}, \qquad (d) \quad a_n = \frac{1}{(\ln n)^p} .$$

18. Seja $(a_n) \subset \mathbb{R}$, $a_n > 0$. Mostre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L .$$

Retorne ao exercício 17 e, se necessário, complete-o.

19. Mostre que se $\lim z_n = 0$ e (w_n) é limitada então, $\lim z_n w_n = 0$.

20. Prove que todo polinômio com coeficientes reais e de grau ímpar admite ao menos uma raiz real.

21. Seja $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, e $a_j \in \mathbb{C}$, para $j = 0, \dots, n$. Seja z_0 arbitrário em \mathbb{C} . Mostre que existem coeficientes b_0, \dots, b_n em \mathbb{C} tais que

$$p(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \dots + b_n(z - z_0)^n, \forall z \in \mathbb{C} .$$

Sugestão: escreva $p(z) = p(z - z_0 + z_0)$.

22. Seja $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ um polinômio complexo, $n \geq 1$. Mostre:

- (a) $|p(z)| \geq |a_n||z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - \dots - |a_1||z| - |a_0|$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
- (b) $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |p(z)| = +\infty$.
- (c) Existe um raio $R > 0$ tal que $|p(z)| > |p(0)| + 1000$ se $|z| > R$.
- (d) A função $|p(z)|$, com $z \in \overline{D}(0; R)$, tem valor mínimo num ponto z_0 .
- (e) O ponto z_0 é o ponto de mínimo absoluto da função $|p(z)|$, $z \in \mathbb{C}$.

23. Mostre que \mathbb{Q} é denso em \mathbb{R} (parte do Teorema 3.11).
24. Mostre que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é denso em \mathbb{R} (parte do Teorema 3.11).
25. Mostre que $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ é denso em \mathbb{C} (Proposição 3.22).
26. Seja $x > 0$ e $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Mostre que existe um único número real $y \geq 0$ tal que $y^n = x$. Dizemos que y é a raiz n -ésima de x : $y = \sqrt[n]{x}$.
27. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Mostre que X é um subconjunto conexo de \mathbb{R} se e somente se X é um subconjunto conexo de \mathbb{C} .

28. Mostre, a partir da definição, que o intervalo $[0, 1]$ é compacto.

Sugestão: Seja $\mathcal{C} = \{O_j : j \in J\}$ uma coleção de abertos em \mathbb{R} tal que $[0, 1] \subset \bigcup_{j \in J} O_j$. Considere o conjunto

$$A = \{x \in [0, 1] : [0, x] \text{ é uma união finita de abertos na cobertura } \mathcal{C}\}.$$

Mostre que A é não vazio e limitado superiormente, $\sup A = 1$ e $\sup A \in A$.

29. Seja (f_n) a sequência de Fibonacci, definida por $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ e

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

(i) Prove que existe $\varphi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$. Compute φ , denominada razão áurea.

(ii) Mostre que

$$\begin{bmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{bmatrix}, \quad \text{se } n \geq 0.$$

(iii) Mostre que

$$\begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n, \quad \text{se } n \geq 1.$$

(iv) Determine uma fórmula para f_n .

Sugestão: Suponha válida a fórmula $f_n = \alpha A^n + \beta B^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, para específicos A, B, α e β . Então, ache A e B tais que a fórmula seja válida para quaisquer α e β . Por fim, determine α e β tais que $f_1 = f_2 = 1$.

30. Definamos $\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}$ para $m \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{m}{n} x^n = 0, \quad \forall x \in (-1, 1), \forall m \in \mathbb{R}.$$