CÁLCULO IV - Bacharelado Física

2 SEMESTRE de 2009

Professor Oswaldo Rio Branco

Fórmula de Taylor com Resto Integral

1. Seja $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, com $\varphi^{(n+1)}$ integrável. Então, integrando sucessivamente por partes,

$$
\begin{aligned}
\varphi(1) - \varphi(0) &= \int_0^1 \varphi'(t)dt \\
&= \int_0^1 1.\varphi'(t)dt \qquad (\text{substituamos } u' = 1 \text{ e } v = \varphi') \\
&= t\varphi'(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 t\varphi''(t)dt \\
&= \varphi'(1) - \int_0^1 t\varphi''(t)dt \\
&= \varphi'(0) + \varphi'(1) - \varphi'(0) \;\; - \int_0^1 t\varphi''(t)dt \\
&= \varphi'(0) + \int_0^1 \varphi''(t)dt - \int_0^1 t\varphi''(t)dt \\
&= \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)dt \qquad (\text{pomos } u' = 1-t \text{ e } v = \varphi'') \\
&= \varphi'(0) \;-\; \frac{(1-t)^2}{2}\varphi''(t)\Big|_0^1 \;+\; \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}\varphi''(t)dt \\
&= \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2} + \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}\varphi''(t)dt \qquad (\text{pomos } u' = \tfrac{(1-t)^2}{2} \text{ e } v = \varphi''') \\
&= \varphi^{(1)}(0) + \frac{\varphi^{(2)}(0)}{2} \;-\; \frac{(1-t)^3}{6}\varphi^{(3)}(t)\Big|_0^1 \;+\; \int_0^1 \frac{(1-t)^3}{6}\varphi^{(4)}(t)dt = \\
&= \varphi^{(1)}(0) + \frac{\varphi^{(2)}(0)}{2!} + \frac{\varphi^{(3)}(0)}{3!} \;+\; \int_0^1 \frac{(1-t)^3}{3!}\varphi^{(4)}(t)dt = \\
&\;. \\
&\;. \\
&\;. \\
&= \varphi^{(1)}(0) + \frac{\varphi^{(2)}(0)}{2!} + \frac{\varphi^{(3)}(0)}{3!} \;+\; \dots \;+\; \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} \;+\; \int_0^1 \frac{\varphi^{(n+1)}(t)}{n!}(1-t)^n dt\ .
\end{aligned}
$$

2. Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $f^{(n+1)}$ integrável, $x_0\in(a,b)$ e $\varphi(t)=f\big(x_0+t(x-x_0)\big)$, $t\in[0,1]$. Então,

$$\begin{cases} \varphi(0)=f(x_0) \\ \varphi(1)=f(x) \\ \varphi'(t)=f'\big(x_0+t(x-x_0)\big)(x-x_0) \\ \varphi''(t)=f''\big(x_0+t(x-x_0)\big)(x-x_0)^2 \\ . \\ . \\ . \\ \varphi^{(k)}(t)=f^{(k)}\big(x_0+t(x-x_0)\big)(x-x_0)^k\,, \quad 1\le k\le n+1\,, \\ \varphi^{(k)}(0)=f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k\,, \quad 1\le k\le n+1\,, \end{cases}$$

e ainda,

$$\int_0^1 \frac{\varphi^{(n+1)}(t)}{n!}(1-t)^n dt \;=\; \int_0^1 \frac{f^{(n+1)}\big(x_0+t(x-x_0)\big)(x-x_0)^{n+1}}{n!}(1-t)^n\,dt \;=$$

$\Big[$com a mudança linear de variável $y=x_0+t(x-x_0)$, $dy=(x-x_0)dt$ e $t=\frac{y-x_0}{x-x_0}\Big]$

$$=\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(y)(x-x_0)^{n+1}}{n!}\Big(1-\frac{y-x_0}{x-x_0}\Big)^n \frac{dy}{x-x_0}$$

$$=\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n dy\;.$$

Provamos o resultado abaixo.

Teorema (Taylor) Suponhamos $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ tal que $f^{(n+1)}$ é integrável. Então, dados $x_0,x\in(a,b)$ existe ξ entre x_0 e x, com $\xi\neq x_0$ e $\xi\neq x$, tal que

$$f(x)=f(x_0)+f^{(1)}(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+....+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\int_{x_0}^{x}\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt\,.$$

Chamamos $P_{n;x_0}(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$ de **polinômio de Taylor de ordem n de f, no ponto x_0,** e $R_{n;x_0}(x)=f(x)-P_{n;x_0}(x)$ de **resto**.

A expressão $R_{n;x_0}=\int_{x_0}^{x}\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$ é a **forma integral do resto**.

Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange

O resultado procurado é uma generalização do Teorema do Valor Médio.

3. Sejam $f : I = (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbb{R}$, $r > 0$, tal que existe $f^{(i)}$, $i \leq n+1$, n fixo, e $x \in I$, $x \neq x_0$. Pelo Teorema do Valor Médio $\exists\, \xi_1$ entre x e x_0, $\xi_1 \neq x_0$, $\xi_1 \neq x$, com $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi_1)$ e,

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi_1)(x - x_0)\ .$$

Seja $\eta \in \mathbb{R}$ determinado pela equação $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \eta(x - x_0)^2$. Então,

$$\varphi(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \eta(x-t)^2 \text{ satisfaz } \ \varphi(x_0) = 0 = \varphi(x)\ .$$

Logo, existe ξ_2 entre x_0 e x, $\xi_2 \neq x_0$ e $\xi_2 \neq x$, tal que $0 = \varphi'(\xi_2)$. Porém,

$$\varphi'(t) = -f'(t) - f''(t)(x-t) + f'(t) + 2\eta(x-t) = \big[2\eta - f''(t)\big](x-t),$$

e avaliando tal identidade em ξ_2 obtemos $2\eta - f''(\xi_2) = 0$ e $\eta = \frac{f''(\xi_2)}{2!}$ e

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(x - x_0)^2\ .$$

De forma análoga, determinando λ pela equação

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \lambda(x-x_0)^{n+1}\ ,$$

definimos a função derivável ψ,

$$\psi(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 \ldots - \frac{f^n(t)}{n!}(x-t)^n - \lambda(x-t)^{n+1}\ ;\ \psi(x_0) = 0 = \psi(x),$$

cuja derivada é a soma abaixo, em que cada segundo termo entre colchetes cancela com o primeiro termo entre os dois colchetes imediatamente anteriores,

$$\begin{aligned}\psi'(t) \ &= \big[-f'(t)\big] + \big[-f''(t)(x-t) + f'(t)\big] + \big[-\tfrac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2 + f''(t)(x-t)\big] \ldots\ldots + \\ &+ \ldots. + \big[-\tfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \tfrac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\big] + \lambda(n+1)(x-t)^n = \\ &= -\tfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \lambda(n+1)(x-t)^n\ .\end{aligned}$$

Uma vez mais, existe ξ entre x_0 e x, $\xi \neq x_0$ e $\xi \neq x$, tal que $\psi'(\xi) = 0$ e portanto,

$$\lambda(n+1)(x-\xi)^n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \Longrightarrow \lambda = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Provamos o resultado abaixo.

Teorema Suponhamos $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ tal que existe $f^{(n+1)}$, n um natural fixo. Então, dados $x_0, x \in (a,b)$ existe ξ entre x_0 e x, com $\xi \neq x_0$ e $\xi \neq x$, satisfazendo

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ \ \xi = \xi(x)\ .$$

A expressão $R_{n;x_0} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ é a **forma de Lagrange do resto**.

Em geral utilizaremos a fórmula de Taylor com resto de Lagrange, por praticidade. Seu inconveniente provém de desconhecermos o ponto "ξ". A forma integral do resto é "melhor" pois mais precisa e define uma função $x \to \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-x_0)^n\,dt$ contínua se $f^{(n+1)}$ é integrável e cuja classe de diferenciabilidade é C^{p+1} se $f^{(n+1)}$ é de classe C^p.

A fórmula de Taylor com resto de Lagrange é deduzível da fórmula de Taylor com resto integral se admitimos $f^{(n+1)}$ contínua. Para tal necessitamos do simples resultado abaixo.

Segundo Teorema do Valor Medio para Integrais: Sejam $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$, tais que φ é contínua e $\psi \geq 0$ é integrável e $\int_a^b \psi(t)dt > 0$. Então, existe $\xi \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(\xi)\int_a^b g(t)\,dt\ .$$

Prova: Sejam m e M o mínimo e o máximo de f em $[a,b]$. Então,

$$mg(t) \leq f(t)g(t) \leq Mg(t) \quad \text{e} \quad m\int_a^b g(t)dt \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq M\int_a^b g(t)dt\ .$$

Logo,

$$m \leq \frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt} \leq M\ ,$$

e pelo Teorema do Valor Intrmediário, existe $\xi \in [a,b]$ tal que

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt} \quad \blacksquare$$

Aplicando tal teorema à forma integral do resto, supondo $f^{(n+1)}$ contínua, obtemos, já que $[x_0,x] \ni t \mapsto (x-t)^n$ é positiva e com integral > 0 (o caso $x < x_0$ é análogo),

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\Big[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\Big|_{x_0}^{x}\Big] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\ ,$$

estabelecendo o que acima afirmamos.