MAT220 - Cálculo IV - IFUSP
Curso: Bacharelado Física Diurno
Prova de Recuperação - 10/02/2010
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
E1	
E2	
Total	

Nome : ____

N$^{\underline{o}}$USP : ____

JUSTIFIQUE TODAS AS PASSAGENS

BOA SORTE!

1. Determine para quais valores de $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ é convergente a série

$$\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n^{\alpha}(\log n)^{\beta}}.$$

2. Dê as séries de McLaurin, e seus raios de convergência, das funções abaixo.

   (a) $f(z) = \ln(1+z)$

   (b) $g(z) = \ln\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$.

3. Seja $C = \{x \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 3\}$. Compute:

   (a) $\displaystyle\oint_C \frac{\text{sen}\pi z^2 + \cos\pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz$

   (b) $\displaystyle\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$

4. Para a função

$$f(z) = \frac{z^2 + 2z}{(z-1)^2(z^2+25)}$$

(a) Determine as singularidades e classifique-as.

(b) Indique as ordens dos polos e compute os respectivos resíduos.

5. Determine a série de Laurent e identifique sua parte principal da função

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-4)} \, ,$$

nas regiões:

(a) $|z| < 1$

(b) $1 < |z| < 4$

(c) $|z| > 4$.

E1. (a) Determine a equação padrão (em coordenadas cartesianas) da quádrica

$$|z+3| \; + \; |z-3| = 10, \quad z \in \mathbb{C} \; .$$

Esboce tal quádrica.

(b) Determine as raízes de $(1+z)^5 = (1-z)^5, \; z \in \mathbb{C}$.

E2. Se $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge absolutamente em $\overline{D_1}(z_0)$ e $0 \leq r \leq 1$ então:

(a) **Igualdade de Parsevall**:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 \, d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} \ .$$

(b) Mostre utilizando (a) a seguinte versão do Princípio do Módulo Máximo: "Se $|f(z_0)| \ \geq \ |f(z)|, \ \forall z \in \overline{D_1}(z_0)$, então f é constante".

Sugestões:

(i) Substitua $z = z_0 + re^{it}$ na expressão para f e multiplique a série para f então obtida pela série analogamente deduzida para $\overline{f}$, conjugada de f. Efetue o produto, arbitrariamente associativo, destas séries absolutamente convergentes e, visto que tal série produto converge uniformemente, integre termo a termo.

(ii) Integre $|f(z_0)|^2 \ \geq \ |f(z)|^2$ sobre o círculo unitário ($r = 1$) centrado em z_0. Lembre a fórmula para os coeficientes de uma série de Taylor: $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.