3ª Prova de MAT0220 - Cálculo IV - IFUSP
2º semestre de 2009 - 11/12/2009
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
E1	
E2	
Total	

Nome : ____

NºUSP : ____

JUSTIFIQUE TODAS AS PASSAGENS

BOA SORTE

1. Para cada $n \geq 1$, seja $f_n(x) = \frac{nx}{nx^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$. Consideremos $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

   (a) Determine o domínio de convergência da sequência (f_n).

   (b) Esboce os gráficos das funções f_n, $n \in \mathbb{N}$, e de f.

   (c) A convergência é uniforme sobre $[0, 1]$?

   (d) Mostre que $\int_0^1 [\lim_{n\to+\infty} f_n(x)]\, dx \neq \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$.

   Resolução:

   (a) Temos, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, com $f(x) = 0$ se $x = 0$ e $f(x) = \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$. Logo, o domínio de convergência é $\mathbb{R}$.

   (c) As funções são contínuas e o limite não é uma função contínua. Logo, a convergência não e uniforme.

2. Utilizando o logaritmo principal *Log*:

   a) compute i^i e $(1+i)^{1+i}$

   b) mostre a regra:

$$(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$$

   se $\alpha \in \mathrm{Dom}(Log)$ e $\alpha^\beta = e^{\beta \mathrm{Log}\alpha} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{Log})$, com Log (z) o logaritmo principal.

Resolução:

(a) Temos, por definição,

$$i^i = e^{i\mathrm{Log}(i)} \quad \text{e} \quad \mathrm{Log}(i) = \ln|i| \ + \ i\mathrm{Arg}(i) \ = 0 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2} \ .$$

Donde,

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \ .$$

Ainda, $(1+i)^{1+i} = e^{(1+i)\mathrm{Log}(1+i)}$ e

$$\mathrm{Log}(1+i) = \ln|1+i| + i\mathrm{Arg}(1+i) = \ln\sqrt{2} \ + i\frac{\pi}{4} \ ,$$

$$(1+i)\mathrm{Log}(1+i) \ = \ (1+i)(\ln\sqrt{2} \ + i\frac{\pi}{4}) \ = (\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}) + i(\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4})$$

e portanto,

$$(1+i)^{1+i} \ = \ e^{\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}} \, e^{i\left(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \ .$$

(b) Temos, $\alpha^\beta = e^{\beta\mathrm{Log}\alpha}$ donde,

$$\mathrm{Log}(\alpha^\beta) = \mathrm{Log}\Big(e^{\beta\mathrm{Log}\alpha} \Big) = (\mathrm{Log} \circ \exp) \ (\beta\mathrm{Log}\alpha) = \beta\mathrm{Log}\alpha \ .$$

Consequentemente, como α^β pertence ao domínio de Log,

$$(\alpha^\beta)^\gamma = e^{\gamma\mathrm{Log}(\alpha^\beta)} = e^{\gamma\,\beta\mathrm{Log}\alpha} = \alpha^{\gamma\beta} \ \blacksquare$$

3. Compute $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,d(z)$ onde:

$$f(z) = \frac{1}{z^3-8} \quad \text{e} \quad \gamma(t) = 2 + e^{it} \ , \quad 0 \le t \le 2\pi \ .$$

Resolução:

Temos,

$$\frac{1}{z^3-8} = \frac{1}{z^2+2z+4}\,\frac{1}{z-2} \ ,$$

e os zeros de z^3-8 que não 2 estão no 2º e 3º quadrantes e não no interior da região limitada por γ.

Logo, pela fórmula integral de Cauchy,

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^3-8} = \int_\gamma \frac{1}{z^2+2z+4}\,\frac{1}{z-2}\,dz = \frac{2\pi i}{2^2+4+4} = \frac{\pi i}{6} \quad \blacksquare$$

4. a) Se f é uma função inteira e existem $M \geq 0$, $R > 0$, e $n \geq 1$ tais que

$$|f(z)| \leq M|z|^n \text{ se } |z| \geq R ,$$

então f é um polinômio de grau menor ou igual a n.

b) (Liouville) Se f é inteira e limitada então f é constante.

Resolução:

(a) Vide Dicas-Lista 7, exercício 17.

(b) A demonstração em (a) é também válida no caso $n = 0$ e um polinômio de grau zero é uma função constante $\blacksquare$

5. a) Seja f holomorfa num domínio Ω contendo a região fechada e limitada determinada por uma curva de Jordan suave por partes γ e z um ponto interior a esta região. Se K é o máximo de $|f|$ ao longo de γ, δ é a distância mínima de z a γ e $L(\gamma)$ é o comprimento de γ então,

$$|f(z)| \leq K \left(\frac{L(\gamma)}{2\pi\delta}\right)^{1/n}, \quad \forall n \geq 1\,,$$

b) Utilizando a), enuncie e dê uma prova do Princípio do Módulo Máximo.

Resolução comentada :

(a) Para uma n-ésima **potência** arbitrária de f, $n \geq 1$, temos

$$\begin{cases} |f^n(\gamma(t))| \leq K^n\,, & \forall t \in \text{ Dom }(\gamma) \\[2ex] 0 < \delta \leq |\gamma(t) - z|\,, & \forall t \in \text{ Dom}(\gamma) \\[2ex] \left|\frac{f^n\left(\gamma(t)\right)}{\gamma(t)-z}\right| \leq \frac{K^n}{\delta}\,, & \forall t \in \text{ Dom}\,(\gamma)\ . \end{cases}$$

Assim, pela Fórmula Integral de Cauchy aplicada à função f^n,

$$f^n(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f^n(w)}{w-z}\,dw \;, \quad \text{e}$$

$$|f(z)|^n = |f^n(z)| \;\leq\; \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{K^n}{\delta}\,|dw| \;=\; \frac{1}{2\pi}\frac{K^n}{\delta}L(\gamma)$$

e, extraindo a raíz n ésima,

$$|f(z)| \;\leq\; K\Big(\frac{L(\gamma)}{2\pi\delta}\Big)^{\frac{1}{n}}, \forall n \geq 1.$$

Com isto provamos o item(a).

Comentário Extra:

Fazendo n tender ao infinito temos $\left(\frac{L(\gamma)}{2\pi\delta}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1$ e obtemos

$$|f(z)| \leq K = \max_\gamma |f| \;=\; \max\{|f(\gamma(t)) : t \in \text{ Dom}(\gamma)\}\,, \forall z \text{ no interior de } \gamma\,,$$

ou seja, provamos que a restrição, que chamarei φ, de f a qualquer região, que chamarei O, limitada por uma curva de Jordan em Ω é uma função holomorfa cujo máximo ocorre na fronteira de O, que é a curva de Jordan.

Assim o máximo, se existir, é assumido na **fronteira** e ainda **mais forte**,

- **não existem** máximos locais estritos.

Por favor, esboce um desenho ilustrativo e veja a próxima página.

(b) **(Princípio do Módulo Máximo)** Seja Ω um aberto conexo e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Então, $|f(z)|$ não pode assumir máximo em Ω a não ser que f seja constante.

Primeira Prova: Seja $z_0 \in \Omega$ tal que $M = |f(z_0)| \geq |f(z)|\,, \quad \forall z \in \Omega$.

Pelas equações C-R: $f' = 0$ nos pontos de máximo local de $|f|$ (verifique). Donde $f'(z_0) = 0$ e: ou f' é identicamente nula ou z_0 é o único zero de f' em algum $\overline{D}(z_0; r)\,, r > 0\,,$ (por que?) e, neste caso, não há outros pontos de máximo em $\overline{D}_r(z_0)$ e z_0 é ponto de máximo local estrito, o que é impossível. Portanto, temos $f' \equiv 0$ e f é constante em Ω $\blacksquare$

2ª prova: Temos $f' = 0$ em todo ponto de máximo local de $|f|$ (verifique).

Se $z_0 \in \overline{D} = \overline{D}_R(z_0) \subset \Omega$ é ponto de máximo de $|f|$, nos círculos de centro z_0, em $\overline{D}$, $|f|$ assume $|f(z_0)|$. Donde, $\{\omega \in \overline{D} : |f(\omega)| = |f(z_0)|\}$ é infinito e $f' = 0$ nos pontos deste conjunto. Logo, $f' \equiv 0$ (por que?) e $f =$ cte $\blacksquare$

Extra 1. Determine a expansão de Laurent da função $f(z) = \dfrac{z^5}{(z^2-4)^2}$ em torno de cada uma de suas duas singularidades, especificando a coroa circular (ou anel) em que cada uma das expansões é válida e explicite a parte principal de cada expansão.

Resolução:

Temos,

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (z-2)^n}{4^n}\,, \quad \text{se } |z-2| < 4\,,$$

e derivando,

$$\frac{1}{(z+2)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+1)(z-2)^n}{4^{n+1}}\,.$$

Logo, para $|z-2| < 4$

$$\frac{1}{(z-2)^2(z+2)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+1)(z-2)^{n-2}}{4^{n+1}} =$$

$$= \frac{1/4}{(z-2)^2} + \frac{(-1/8)}{(z-2)} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+3)}{4^{n+3}}(z-2)^n\,,\ |z-2| < 4\,.$$

Por fim, devemos multiplicar a série acima por

$$z^5 = 32 + 80(z-2) + 80(z-z2)^2 + 40(z-2)^3 + 10(z-2)^4 + (z-2)^5 \ \blacksquare$$

Extra 2. a) Determine para as funções abaixo a ordem do polo de f em z_0:

i) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^3(z-1)}$, $z_0 = 0$

ii) $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{z^4 - z^5}$, $z_0 = 1$

b) Sabendo que o resíduo no ponto z_0 de uma série de Laurent em torno de z_0,

$$f(z) \;=\; \sum_{m \geq 1} \frac{b_m}{(z-z_0)^m} \;+\; \sum_{n \geq 0} a_n (z-z_0)^n \,,$$

indicado por $Res(f; z_0)$ é o coeficiente b_1, determine nas funções dadas em a) e em seus respectivos dados pontos, seus respectivos resíduos : $Res(f; z_0)$.

Resolução:

(a) (i) Para $f(z) = \frac{\cos z}{z^3(z-1)}$, $a = 0$, como $\cos 0 = 1$ e a função $z-1$ não se anula em $a = 0$ é natural que 0 seja polo de ordem 3. De fato,

$$\lim_{z \to 0} z^3 \frac{\cos z}{z^3(z-1)} = \lim_{z \to 0} \frac{\cos z}{z-1} = -1 \neq 0$$

o que mostra que 0 é um polo de ordem 3.
Para computar o resíduo temos

$$\mathrm{Res}\,(f; 0) = \frac{g''(0)}{2!}, \quad \text{onde}$$

$$g(z) = z^3 f(z) = \frac{\cos z}{z-1} \;, g'(z) = -\frac{\sin z}{z-1} - \frac{\cos z}{(z-1)^2} \;,$$

$$g''(z) = -\frac{\cos z}{z-1} + \frac{\sin z}{(z-1)^2} + \frac{\sin z}{(z-1)^2} + 2\frac{\cos z}{(z-1)^3}$$

e $g''(0) = -1$ e portanto, $\mathrm{Res}\,(f; 0) = -\frac{1}{2}$.

(b) 1 é polo de ordem 1 e $\mathrm{Res}(f; 1) = -e^2$ pois,

$$\mathrm{Res}(f; 1) = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{e^{2z}}{z^4 - z^5} = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{e^{2z}}{z^4(1-z)} = -e^2 \quad \blacksquare$$