$2^{\underline{a}}$ Prova de MAT0220 Cálculo IV - IFUSP
$2^{\underline{o}}$ semestre de 2009- 13/11/09
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	

Nome : ____________________*GABARITO*____________________

$N^{\underline{o}}$USP : ____

JUSTIFIQUE TODAS AS PASSAGENS

BOA SORTE

1. Determine os valores máximo e mínimo de

$$(a)\ \ \frac{|z-i|}{|z+i|}\,,\ \text{com}\ |z|=3 \qquad ; \qquad (b)\ \ |z+i|\,,\ \text{com}\ |z-2|=1\ .$$

Resolução:

Utilizemos o isomorfismo entre $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$, como espaços vetoriais reais.

(a) Seja C a circunferência de centro na origem e raio 3.
O ponto $(0,-3) \equiv -3i$ é o ponto em C mais distante de $i \equiv (0,1)$ e também o mais próximo de $-i \equiv (0,-1)$. Logo, o valor máximo pedido é

$$\frac{|-3i-i|}{|-3i+i|} = \frac{4}{2} = 2\ .$$

O ponto $(0,3) \equiv 3i$ é o ponto em C mais próximo de $i \equiv (0,1)$ e também o mais distante de $-i \equiv (0,-1)$. Logo, o valor mínimo pedido é,

$$\frac{|3i-i|}{|3i+i|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\quad .$$

(b) Os pontos da circunferência C, centrada em $z_o = 2$ e de raio 1, que são o mais próximo e o mais distante do ponto $-i$ são os pertencentes à intersecção da reta determinada pelos pontos $(0,-1)$ e $(2,0)$ com a circunferência C:

$$2 \pm \frac{2-(-i)}{|2-(-i)|} = 2 \pm \frac{2+i}{\sqrt{5}}\ .$$

A distância mínima e máxima são, respectivamente,

$$\left|\left(2-\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)-(-i)\right| = \sqrt{6-2\sqrt{5}} \qquad , \qquad \left|\left(2+\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)-(-i)\right| = \sqrt{6+2\sqrt{5}}\ \blacksquare$$

Atenção Uma outra resolução para (a) é obtida analizando máximo/mínimo de

$$\frac{|z-i|^2}{|z+i|^2} = f(x,y) = \frac{x^2+(y-1)^2}{x^2+(y+1)^2} = \frac{10-2y}{10+2y} = \frac{5-y}{5+y}\,,$$

para $x^2+y^2=9$. Isto é, o máximo e o mínimo de $g(y) = \frac{5-y}{5+y}\,, y \in [-3,3]$.

2. Seja $z_o \in \mathbb{C}$ um ponto arbitrário.

   (a) Seja $p \in \mathbb{C}[z]$ e suponha que $p(z) = a_0 z + a_1$, com $a_0 \neq 0$. Mostre que existe um único par $(b_0, b_1) \in \mathbb{C}^2$ tal que $p(z) = b_0(z - z_0) + b_1$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

   (b) Seja $p \in \mathbb{C}[z]$ e suponha que $p(z) = a_0 z^2 + a_1 z + a_2$, com $a_0 \neq 0$. Mostre que existe uma só terna $(b_j)_{0 \leq j \leq 2} \in \mathbb{C}^3$ tal que $p(z) = b_0(z - z_0)^2 + b_1(z - z_0) + b_2$.

Resolução:

(a) **Existência:** Procuremos determinar $b_0\,, b_1 \in \mathbb{C}$ tais que

$$a_0 z + a_1 \;=\; b_0(z - z_0) + b_1 \;=\; b_0 z + (-b_0 z_0 + b_1)\,, \forall z \in \mathbb{C}\ .$$

para tal é suficiente que resolvamos o sistema linear

$$\begin{cases} \quad b_0 & = a_0 \\ -\,b_0 z_0 + b_1 & = a_1 \end{cases} ,$$

o qual é já escalonado e com solução única

$$\begin{cases} b_0 & = a_0 \\ b_1 & = a_0 z_0 + a_1\ . \end{cases}$$

Unicidade: Se $a_0 z + a_1 \;=\; b_0(z - z_0) + b_1$, $\forall z \in \mathbb{C}$, computando em z_0 temos $b_1 = a_0 z_0 + a_1$ e, calculando tal identidade em algum $w \neq z_0$,

$$\begin{aligned} a_0 w + a_1 \;& = b_0(w - z_0) + b_1 = b_0(w - z_0) + a_0 z_0 + a_1 \\ & \Rightarrow a_0 w = b_0(w - z_0) + a_0 z_0 \\ & \Rightarrow a_0(w - z_0) = b_0(w - z_0) \\ & \Rightarrow b_0 = a_0\ . \end{aligned}$$

(b) **Existência:** Com a translação $z \mapsto z - z_0$ obtemos a expressão para p:

$$p(z) \;\; = p(z_0 + (z - z_0)) \;=\; a_0[z_0 + (z - z_0)]^2 + a_1[z_0 + (z - z_0)] + a_2 \;=$$

$$= a_0(z - z_0)^2 \;+\; (2a_0 z_0 + a_1)(z - z_0) \;+\; (a_0 z_0^2 + a_1 z_0 + a_2)\ .$$

Unicidade:
Seja $q(z) = b_0(z - z_0)^2 + b_1(z - z_0) + b_2\,,$ com $b_0\,, b_1$ e $b_2 \in \mathbb{C}\,,$ arbitrários .
É fácil ver que $q(z_0) = b_2$, $q'(z_0) = b_1$ e $q''(z_0) = 2b_0$.
Então, se $p(z) = q(z)\,, \forall z \in \mathbb{C}$, temos as fórmulas para os coeficientes de q,

$$\begin{cases} b_2 & = p(z_0)\,, \\ b_1 & = p'(z_0)\,, \\ b_0 & = \frac{p''(z_0)}{2} \end{cases} \quad \blacksquare$$

3. Determine se são convergentes ou divergentes as séries dadas.

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2(1-\cos\frac{1}{n^2})$.

(b) $\sum \frac{2.4.6....(2n)}{n^n}$

(c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log n[\log(\log n)]^\alpha}$, $0<\alpha<1$.

Resolução:

(a) A série é de termos positivos e comparando no limite com $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ temos,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(1-\cos\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4}},$$

e então, mudando para a variável contínua $\frac{1}{\sqrt{x}}$,

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}.$$

Pelo Critério da comparação no Limite, a séria dada converge.

(b) Pelo Critério da Razão a série dada converge pois,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2.4.6.....(2n)(2n+2)}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{2.4.6....(2n)} = 2\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1.$$

(c) A função $f(x) = \frac{1}{x\log x[\log(\log x)]^\alpha}, x \geq 10$, é contínua e decrescente. Apliquemos então o Critério da Integral. Temos,

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{x\log x[\log(\log x)]^\alpha}, dx = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{N\to+\infty} \left\{ [\log(\log x)]^{1-\alpha}\Big|_{10}^{N} \right\} = +\infty,$$

pois $1-\alpha>0$. Assim, a série dada diverge ■

4. Mostre que $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, $x \in \mathbb{R}$, com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, satisfaz,

   (a) Se $\alpha \geq 0$, converge (absolutamente) se somente se $x \in [-1, 1]$.

   (b) Se $\alpha < -1$, converge (absolutamente) se e somente se $x \in (-1, 1)$.

Resolução: Lembrete: $a_n = \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$.

Pela fórmula de Hadamard o raio de convergência ρ da série dada é tal que,

$$\rho^{-1} = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!} \frac{n!}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots.(\alpha-n+1)} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\alpha-n}{n+1} \right| = 1 \ ,$$

e a série converge absolutamente em $(-1, +1)$ e diverge se $|x| > 1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

(a) Se $\alpha \geq 0$ temos $|n - \alpha| = n - \alpha$ se $n >>$ e, pelo Critério de Raabe,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} n\Big(1 - |\tfrac{a_{n+1}}{a_n}|\Big) &= \lim_{n\to+\infty} n\Big(1 - \Big|\tfrac{\alpha-n}{n+1}\Big|\Big) = \lim_{n\to+\infty} n\Big(1 - \tfrac{n-\alpha}{n+1}\Big) \\ &= \lim_{n\to+\infty} n\tfrac{\alpha+1}{n+1} = \alpha + 1 > 1 \,, \end{aligned}$$

e a série dada converge absolutamente em $x = \pm 1$ e em todo $x \in [-1, +1]$.

(b) Se $\alpha < -1$, o termo geral das séries binomiais nos extremos $x = \pm 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n}$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n}$ não tendem a zero pois,

$$\left| \frac{\binom{\alpha}{n+1}}{\binom{\alpha}{n}} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\alpha - n}{n+1} \right| = \frac{n - \alpha}{n+1} > 1 \ ,$$

e então, a série binomial, neste caso, diverge nos extremos $x = \pm 1$ ■

5. Considere a função f dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n^3} \ .$$

(a) Qual o domínio de f?

(b) Mostre que f é contínua em seu domínio.

(c) Justifique a igualdade

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^4} \ .$$

(d) Prove que para todo x no domínio de f,

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n-1)x^{n-2}}{n^3} \ .$$

Resolução:

(a) e (b): O raio de convergência ρ da série de potências é dado pela fórmula de Hadamard: $\rho^{-1} = \limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n^3}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^3} = 1$. Logo, $\rho = 1$.

Ainda, como $\sum\limits^{+\infty} \frac{1}{n^3} < \infty$, o domínio de convergência é $[-1, +1]$ e, pelo teste M de Weierstrass, a série dada converge uniformemente e absolutamente em seu domínio de convergência. Como se trata de uma série de funções contínuas, a soma da série é uma função contínua em $[-1, +1]$.

(c) Pelos ítens (a) e (b) podemos integra a série de funções termo a termo e obtemos,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x)\, dx &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-1}^{1} \frac{x^{n-1}}{n^3}\, dx \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^4}\Big|_{-1}^{+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^4} - \frac{(-1)^n}{n^4}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \ .
\end{aligned}$$

(d) A série das derivadas das funções $f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{n^3}$, $f_n'(x) = \frac{(n-1)x^{n-2}}{n^3}$, $n \geq 2$, é também pelo teste M de Weierstrass uniformemente e absolutamente convergente em $[-1, +1]$ pois $\left|\frac{(n-1)x^{n-2}}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, se $n \geq 2$ e $|x| \leq 1$.Então também podemos derivar a série termo a termo e obtemos,

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n-1)x^{n-2}}{n^3} \quad \blacksquare$$

6. Mostre que $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

   Resolução:

   A função $f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z$, $z \in \mathbb{C}$, é definida por uma série de potências convergente em todo o plano complexo pois $\sin z$, $z \in \mathbb{C}$, e $\cos z$, $z \in \mathbb{C}$, o são e o produto e a soma de séries de potências é uma série de potências.

   Entretanto temos $f(x) - 1 = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, e portanto a série de potências para $f(z) - 1$ é igual à série de potências para a função nula em um conjunto com ponto de acumulação, a reta real. Logo, pelo Princípio de Identidade para Séries de Potências, a série de potências para a função $f(z) - 1\,, z \in \mathbb{C}$, é a nula e $f(z) = 1\,, \forall z \in \mathbb{C}$ $\blacksquare$

7. Considerando o isomorfismo canônico entre $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$, dado Ω aberto em $\mathbb{C}$ seja $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ o aberto identificado a Ω por tal isomorfismo. Ainda, dada $f : \Omega \to \mathbb{C}$ seja $\tilde{f} : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$\begin{cases} \tilde{f}(x,y) & = (u(x,y))\,, v(x,y)) \in \mathbb{R}^2 \\ f(z) & = u(x,y) + iv(x,y) \\ u(x,y) & = Ref(z) \\ v(x,y) & = Imf(z) \\ x+iy & = z\,, \text{ com } x\,, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Suponha que existem as derivadas complexas $f^{(k)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, e que $\tilde{f}$ é de classe $C^\infty(\tilde{\Omega})$, nas variáveis cartesianas $(x,y) \in \tilde{\Omega}$.

- Compute a matriz jacobiana $J(\tilde{f})(x,y)$ [de $\tilde{f}$ no ponto $(x,y) \in \tilde{\Omega}$] e mostre que seu determinante [o jacobiano de $\tilde{f}$] é $|f'(z)|^2$, com $z = x+iy$.

Solução:

Utilizemos a notação: $\Delta z = z - z_o = \Delta x + i\Delta y$, $\Delta x = x - x_o$ e $\Delta y = y - y_o$.

Como existe $f'(z_o) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_o+\Delta z)-f(z_o)}{\Delta z}$, $\Delta z \in \mathbb{C}$. Então, se $\Delta y = 0$ temos

$$\begin{aligned} f'(z_o) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(z_o+\Delta x)-f(z_o)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_o+\Delta x,y_o) - u(x_o,y_o)] + i[v(x_o+\Delta x,y_o) - v(x_o,y_o)]}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_o,y_o) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_o,y_o) \equiv \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_o,y_o)\,. \end{aligned}$$

Analogamente, se $\Delta x = 0$ temos $\Delta z = i\Delta y$ e,

$$\begin{aligned} f'(z_o) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(z_o+i\Delta y)-f(z_o)}{i\Delta y} \\ &= \frac{1}{i}\lim_{\Delta y \to 0} \frac{[u(x_o,y_o+\Delta y)-u(x_o,y_o)] + i[v(x_o,y_o+\Delta y)-v(x_o,y_o)]}{\Delta y} \\ &= \frac{1}{i}\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x_o,y_o) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_o,y_o)\right] = \frac{\partial v}{\partial y}(x_o,y_o) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_o,y_o)\,, \end{aligned}$$

e consequentemente: $if'(z_o) \equiv \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_o,y_o)$ e ainda, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$. Logo, a matriz jacobiana de $\tilde{f}$ é

$$J(\tilde{f}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \\ -\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix},$$

cujo determinante (o jacobiano) é:

$$\det J(\tilde{f})(x_o,y_o) = |\frac{\partial u}{\partial x}|^2 + |\frac{\partial v}{\partial x}|^2 = |\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}|^2 = |f'(z_o)|^2 \quad \blacksquare$$