Curso: MAT 220- CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV - IFUSP
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Segundo Semestre de 2009

cm

LISTA7 - DICAS:
LISTA DE EXERCÍCIOS 7 - Integração

Revisão do Teorema de Green

(1) Leia a demonstração da versão simplificada do Teorema de Green nas páginas 27 a 31 do livro texto 'Cálculo em Uma Variável Complexa', Marcio G. Soares.

(2) Para cada um dos conjunto abaixo, sua fronteira é descrita por uma curva suave por partes. Esboce o conjunto, sua fronteira e dê uma aplicação que a descreva.

(a) $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 , \mathrm{Re}(z) \geq \frac{1}{2}$.

(b) $V = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} \leq |z| \leq 1 ,\ \mathrm{Re}(z) \geq\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$.

(c) $V = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{3} \leq |z| \leq 1 ,\ \mathrm{Re}(z) \geq\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$.

(3) Calcule $\int_{\partial V} f$, com V cada um dos conjuntos do exer. 2 (V e ∂V positiva/e orientados) e

$$f(x,y) = \Big(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \Big) \quad , \quad f(x,y) = \Big(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \Big) .$$

4) Seja V como no enunciado do Teorema de Green. Mostre que a área de V é dada por

$$\int_{\partial V} x dy .$$

(5) Use (4) para calcular a área de

$$V = \Big\{ (x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \Big\} \quad \text{e} \quad V = \Big\{ (x,y) : 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9 ,\ 1 \leq xy \leq 4 \Big\} .$$

(6) Calcule (V e ∂V positiva/e orientados)

$$\int_{\partial V} (x^2 - y^2) dx + 2xydy \quad \text{e} \quad \int_{\partial v} 2xydx + (y^2 - x^2) dy ,$$

onde V é

(i) O retângulo delimitado pelas retas $y = x$, $y = -x + 4$, $y = x + 2$ e $y = -x$.

(ii) $V = \{(x,y) : 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9 , 1 \leq xy \leq 4\}$.

Holomorfia

Se $f:\Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ é derivável em z_0 e se $\tilde{f} = \big(u(x,y)\,,v(x,y)\big)$ é a identificação usual com f através do isomorfismo natural entre $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$ mostramos

$$J(\tilde{f}) \;=\; \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) \end{bmatrix} \;,$$

a forma matricial das equações C-R . EM L1, Exerc. 4, vimos $z = a + bi \equiv \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

(7) Dada $f:\Omega \to \mathbb{C}$, Ω aberto em $\mathbb{C}$, seja $\tilde{f}(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big)$ com a notação acima e suponhamos $\tilde{f}$ **diferenciável** [logo, existem $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$].

(a) Escrevendo,

$$x = \frac{z+\overline{z}}{2} \quad , \quad y = \frac{z-\overline{z}}{2i}\,,$$

$$f = u(x,y) + iv(x,y) = u\Big(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\Big) \;+\; iv\Big(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\Big),$$

desenvolva, utilizando a regra da cadeia, as fórmulas (memorize-as) para

$$\frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,,$$

em termos das derivadas parciais de u e v, em relação às variáveis x e y.

(b) Mostre que $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ se e só se valem as equações de C-R: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

(c) Mostre que valem as equações de C-R se e somente se $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.

(d) Interprete o resultado em (c).

(8) Verifique se se cumprem as condições $C-R$ para as seguinte funções

(i) $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

(ii) $f(z) = e^{-y}(\cos x + i\sin x)$.

(iii) $f(z) = e^{-x}(cosy - i\sin y)$

(iv) $f(z) = e^{y}(\cos x + i\sin x)$.

(9) Seja $f(z)$ uma função **inteira** (holomorfa em todo o plano complexo). Mostre que a função $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ também é inteira. Mostre, ainda, que a função $h(z) = \overline{f(z)}$ é derivável em $z_0 = 0$ se e somente se $f'(0) = 0$.

Sugestão:

Para a segunda parte verifique

$$(1) \qquad \frac{h(z)-h(0)}{z} \;=\; \overline{\frac{f(z)-f(0)}{z}}\;\frac{\overline{z}}{z}\,,$$

(2) existe $h'(0)$ $\Leftrightarrow$ existe $\lim\limits_{z\to 0}\Big[\,\overline{\frac{f(z)-f(0)}{z}}\;\frac{\overline{z}}{z}\Big]$ e (3) não existe $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\overline{z}}{z}$ (verifique).

Assim, por (3), existe $\lim\limits_{z\to 0}\Big[\,\overline{\frac{f(z)-f(0)}{z}}\;\frac{\overline{z}}{z}\Big]$ se e somente se (verifique) $\lim\limits_{z\to 0}\overline{\frac{f(z)-f(0)}{z}} \;=\; 0$ ∎

(10) Mostre que

(a) $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \quad , \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$.

(b) $\overline{\cos z} = \cos \overline{z}$ e $\overline{\sin z} = \sin \overline{z}$.

(c) $|\cos z|^2 + |\sin z|^2 = 1$ se e só se z é real

Sugestão-Resolução: Não sei se a melhor.

(c) Verifiquem antes as relações (é necessário): $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$ e, principalmente, $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$.

Temos,

$$\begin{aligned} |\cos z|^2 + |\sin z|^2 &= \cos z\, \overline{\cos z} + \sin z\, \overline{\sin z} = \cos z \cos \overline{z} + \sin z \sin \overline{z} \\ &= \cos z \cos(-\overline{z}) - \sin z \sin(-\overline{z}) = \cos(z - \overline{z}) \ . \end{aligned}$$

Se $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, temos

$$|\cos z|^2 + |\sin z|^2 = \cos(2bi) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2bi)^{2n}}{(2n)!} \ .$$

Mas, $i^{2n} = (-1)^n$ e portanto .....

(11) Compute as derivadas e expresse na forma $u + iv$ o **seno e o co-seno hiperbólicos**:

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \quad , \quad \sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \ .$$

(12) Identifique o erro no **Paradoxo de Bernoulli**:

$$(-z)^2 = z^2 \Rightarrow 2\log(-z) = 2\log z \Rightarrow \log(-z) = \log z \ .$$

(13) Usando o ramo principal de z^λ calcule $2^{\sqrt{2}}$, $(5i)^{1+i}$ e 1^i e 1^{-i}.

Resolução

Computarei dois dos pedidos.

(i) Se Log$z$ é o logaritmo principal e Arg$z$ é o argumento principal temos

$$2^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\mathrm{Log}2}, \mathrm{Log}2 = \ln 2 + i\mathrm{Arg}2 = \ln 2 + i0 = \ln 2 \ ,$$

logo, $2^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln 2}$, onde $\ln 2$ é o usual logatimo natural em $\mathbb{R}$.

(ii) $(5i)^{1+i} = e^{(1+i)\mathrm{Log}(5i)}$, $\mathrm{Log}(5i) = \ln|5i| + i\mathrm{Arg}(5i) = \ln 5 + i\frac{\pi}{2}$ e

$$(5i)^{1+i} = e^{(1+i)(\ln 5 + i\frac{\pi}{2})} = e^{(\ln 5 - \frac{\pi}{2}) + i(\ln 5 + \frac{\pi}{2})} = e^{\ln 5 - \frac{\pi}{2}}[\cos(\ln 5 + \frac{\pi}{2}) + i\sin(\ln 5 + \frac{\pi}{2})],$$

complete o cálculo.

(14) Determine o ramo principal da função $\sqrt{z-1}$.

(15) Compute $\int_\gamma f(z)\,dz$ onde f e γ são dados.

(a) $f(z) = z\overline{z}$ e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(b) $f(z) = \frac{z+1}{z}$ e $\gamma(t) = 3e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(c) $f(z) = \frac{z+1}{z}$ e $\gamma(t) = 5i + e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(d) $f(z) = \frac{1}{z^2-2}$ e $\gamma(t) = 2 + e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(e) $f(z) = \frac{1}{z^2-2}$ e $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(f) $f(z) = \pi e^{\pi\overline{z}}$ e γ é o quadrado de vértices 0, 1, $1+i$ e i, positivamente orientado.

(g) $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ e $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $r > 0$.

(h) $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n}$ e $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $r > 0$, $n \geq 2$.

(i) $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2}$ e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(j) $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$ e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(k) $f(z) = \frac{\log z}{z^n}$ e $\gamma(t) = 1 + \frac{1}{4}e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(l) $f(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{z^n}$ e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $n \geq 1$.

(m) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ e $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Respostas e Sugestões:

Respostas:

(a) zero

(b) $2\pi i$

(c) zero

(d) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}i$

(e) zero

(f) ....

(g) $2\pi i$

(h) zero

(i) -2π

(j) $-\frac{2\pi i}{3!}$

(k) zero

(l) $\frac{2[1+(-1)^{n-1}]\pi}{(n-1)!}i$

(m) zero

Sugestões:

(d) Definindo $f(z)=\frac{1}{z+\sqrt{2}}$ temos que f é holomorfa em um aberto contendo a curva γ e a região limitada por γ (o "interior´´ da curva γ) e que $\sqrt{2}$ pertence a esta região. Logo, pela fórmula integral de Cauchy [vide Teorema 2.6, no livro texto, página 114],

$$f(\sqrt{2})=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)}{z-\sqrt{2}}\,dz\Rightarrow\quad\int_\gamma\frac{1}{z^2-2}\,dz=\int_\gamma\frac{\frac{1}{(z+\sqrt{2})}}{z-\sqrt{2}}\,dz=2\pi f(\sqrt{2})i=2\pi\frac{1}{2\sqrt{2}}i=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i\quad\blacksquare$$

(16) Mostre que $\int_\gamma\frac{e^{kz}}{z}\,dz=2\pi i$, onde k é uma constante real e $\gamma(t)=e^{it}$, $0\le t\le 2\pi$. Use esse resultado para mostrar que

$$\int_0^\pi e^{k\cos t}\cos(k\sin t)\,dt=\pi\ .$$

Sugestão:

Pela Fórmula Integral de Cauchy temos,

$$1=e^{k0}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{e^{kz}}{z-0}\,dz\ .$$

Logo, se $\mathrm{Im}(a+bi)=b$ é a parte imaginária de um número complexo $z=a+bi$,

$$\mathrm{Im}\left\{\int_\gamma\frac{e^{kz}}{z-0}\,dz\right\}=2\pi\,,\quad .$$

Substituindo $\gamma(t)=e^{it}=\cos t+\sin t\,,t\in[0,2\pi]$, compute então,

$$\mathrm{Im}\left\{\int_\gamma\frac{e^{kz}}{z}\,dz\right\}\qquad\blacksquare$$

(17) Se f é uma função inteira e existem $M\ge 0$, $R>0$ e $n\ge 1$ tais que $|f(z)|\le M|z|^n$ para $|z|\ge R$, mostre que f é um polinômio de grau menor ou igual a n.

Sugestão:

Considere γ a parametrização da curva centrada na origem e de raio $R'\ge R$ e utilize as Estimativas de Cauchy, Corolário 6.31, para mostrar que, para $m\ge n+1$,

$$|f^{(m)}(0)|\ \le\frac{\text{cte.}}{{R'}^{\,m-n}}\qquad .$$

Por fim, como f é inteira utilize

$$f(z)=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{f^{(j)}(0)}{j!}z^j\qquad\blacksquare$$

(18) Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa, Ω um domínio. Suponha que exista $a \in \Omega$ tal que $|f(a)| \le |f(z)|$, $\forall z \in \Omega$. Mostre que ou $f(a) = 0$ ou f é uma função constante.

(19) Seja f holomorfa num domínio Ω contendo a região fechada e limitada determinada por uma curva de Jordan suave por partes γ e z um ponto interior a esta região. Se K é o máximo de $|f|$ ao longo de γ e δ é a distância mínima de z a γ então,

$$|f(z)| \le K\Big(\frac{L(\gamma)}{2\pi\delta}\Big)^{\frac{1}{n}} \quad , \forall n \ge 1\,; \quad L(\gamma) \text{ o comprimento de } \gamma\ .$$

Aplique tal desigualdade para dar uma outra prova do **Princípio do Módulo Máximo.**

Resolução comentada:

(a) Para uma n-ésima **potência** arbitrária de f, $n \ge 1$, temos

$$\begin{cases} |f^n\big(\gamma(t)\big)| \le K^n\,, & \forall t \in \text{ Dom } (\gamma) \\ \\ 0 < \delta \le |\gamma(t) - z|\,, & \forall t \in \text{ Dom}(\gamma) \\ \\ \Big|\frac{f^n\big(\gamma(t)\big)}{\gamma(t)-z}\Big| \le \frac{K^n}{\delta}\,, & \forall t \in \text{ Dom}\,(\gamma)\ . \end{cases}$$

Assim, pela Fórmula Integral de Cauchy aplicada à função f^n,

$$f^n(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f^n(w)}{w-z}\,dw \quad , \quad \text{e}$$

$$|f(z)|^n = |f^n(z)| \;\le\; \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{K^n}{\delta}\,|dw| \;=\; \frac{1}{2\pi}\frac{K^n}{\delta}L(\gamma)$$

e, extraindo a raíz n ésima,

$$|f(z)| \;\le\; K\Big(\frac{L(\gamma)}{2\pi\delta}\Big)^{\frac{1}{n}}, \forall n \ge 1.$$

Com isto provamos o item(a).

Comentário Extra:

Fazendo n tender ao infinito temos $\left(\frac{L(\gamma)}{2\pi\delta}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1$ e obtemos

$$|f(z)| \le K = \max_\gamma |f| \;=\; \max\{|f\big(\gamma(t)\big) : t \in \text{ Dom}(\gamma)\}\,, \forall z \text{ no interior de } \gamma\ ,$$

ou seja, provamos que a restrição, que chamarei φ, de f a qualquer região, que chamarei O, limitada por uma curva de Jordan em Ω é uma função holomorfa cujo máximo ocorre na fronteira de O, que é a curva de Jordan.

Este comentário já demonstra que o máximo ocorre na fronteira.

Faça um desenho e veja a próxima página.

(b) **(Princípio do Módulo Máximo)** Seja Ω um aberto conexo e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Então, $|f(z)|$ não pode assumir máximo em Ω a não ser que f seja constante.

Detalhe a demonstração abaixo.

Prova: Seja $z_0 \in \Omega$ tal que $M = |f(z_0)| \geq |f(z)|, \quad \forall z \in \Omega$.

Pelo comentário z_0 não é ponto de máximo estrito de $|f|$ em nenhum disco fechado $\overline{D}_r(z_0) \subset \Omega$ e nestes discos há um outro ponto de máximo de $|f|$. Logo, em todo $\overline{D}_r(z_0)$ há infinitos pontos em que $|f|$ assume o máximo.

Pelas equações C-R temos $f' = 0$ em qualquer ponto de máximo local. Donde, em $\overline{D}_r(z_0)$, f' é identicamente nula e f é constante.

Consequentemente, f é constante em Ω $\blacksquare$

(20) **Igualdade de Parsevall**: Se $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, $\forall z \in \overline{D}_\rho(z_0)$, e se $r \leq \rho$, então

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta}|^2 d\theta = \sum |a_n|^2 r^{2n} \ .$$

Aplique tal identidade para dar uma outra prova do **Princípio do Módulo Máximo.**

Sugestão: Vide nas notas do curso o Corolário 4.25, pg. 67, ao Teorema 4.22, pg. 66. e os diagramas na página 68.

Observemos que

$$f(z_0 + re^{i\theta}) \ = \ \sum_{n=0}^{=\infty} a_n r^n e^{in\theta}\,,$$

e que

$$\sum_{n=0}^{=\infty} |\, a_n r^n e^{in\theta}\,| \ \leq \ \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n||r^n| \ \leq \ \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\rho^n \ < \infty \quad , \text{ por hipótese.}$$

Portanto, pelo Teste$-M$ de Weieirstrass a série de funções

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta}\,, \quad (r,\theta) \in [0,\rho] \times [0,2\pi]$$

é uniformemente e absolutamente convergente em $[0,\rho] \times [0,2\pi]$. Use o Corolário 4.25.

(21) **Princípio da Identidade para Funções Holomorfas** Sejam f e g holomorfas num domínio Ω. Se $X = \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ tem ponto de acumulação em Ω, então $f \equiv g$.

(22) Determine a expansão de Laurent da função dada em torno de cada uma de suas singularidades, especificando o anel no qual ela é válida.

(i) $f(z) = \frac{1}{z^2(z+i)}$

(ii) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+i)}$

(iii) $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$

(iv) $f(z) = \cos\frac{1}{z}$

(v) $f(z) = \frac{z^5}{(z^2-2)^2}$.

Resoluções: Atenção: é necessário checar as contas.

(i) As singularidades são 0 e $-i$.

A série de Laurent em torno de 0**:**

Temos, devido à condição para a convergência de uma série geométrica,

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1/i}{1+\frac{z}{i}} = \frac{1/i}{1-iz} = \frac{1}{i}\sum_{m=0}^{+\infty}(iz)^m = -i + z + \sum_{m=2}^{+\infty} i^{m-1}z^m\,, \quad \text{se} \quad |z| < 1\,.$$

Donde, a série de Laurent convergente na coroa $\{z : 0 < |z| < 1\}$ centrada na origem,

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z+i)} = \frac{-i}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{m=2}^{+\infty} i^{m-1}z^{m-2} = \frac{-i}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} i^{n+1}z^n\,, \quad \text{em} \quad 0 < |z| < 1\,,$$

e portanto o resíduo de f no ponto 0 é 1.

O resíduo de uma série de Laurent

$$..... + \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + ... + \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + ... + a_n(z-z_0)^n + ...$$

no ponto z_0**, Res**$(f;z_0)$**, é o coeficiente** b_1**:**

$$\text{Res}\,(f;z_0) = b_1 \quad .$$

A série de Laurent em torno de $-i$:

Utilizando séries geométricas obtemos, na bola $\{z : |z+i| < 1\}$ centrada em $-i$,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{-i+(z+i)} = \frac{\frac{1}{-i}}{1-\frac{z+i}{i}} = \frac{i}{1+i(z+i)} = \frac{i}{1-[-i(z+i)]} = i\sum_{m=0}^{+\infty}(-i)^m(z+i)^m = -\sum_{m=0}^{+\infty}(-i)^{m+1}(z+i)^m\,.$$

Derivando a fórmula acima na bola aberta $\{z : |z+i| < 1\}$ obtemos

$$-\frac{1}{z^2} = -\sum_{m=1}^{+\infty} m(-i)^{m+1}(z+i)^{m-1} = -\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(-i)^{n+2}(z+i)^n = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)(-i)^{n+2}(z+i)^n\,,$$

e a série de Laurent convergente na coroa $\{z : 0 < |z+i| < 1\}$ centrada em $-i$

$$\frac{1}{z^2(z+i)} = \frac{-1}{z+i} + \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)(-i)^{n+2}(z+i)^{n-1} = \frac{-1}{z+i} + \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(-i)^{n+3}(z+i)^n\,,$$

e $\text{Res}(f;-i) = -1$. ■

(23) Uma função holomorfa num disco em torno de um polo é a soma de duas funções, uma racional e outra holomorfa.

(24) Dê uma função com um polo de ordem 1 em $z = 2$ e um polo de ordem 7 em $z = \sqrt{2}i$.

(25) Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa e tal que existe $\lim_{z\to\infty} f(z)$. Então, f é constante.

(26) Classifique a singularidade 0 de cada uma das funções:

(i) $f(z) = \sin(\frac{1}{z})$	(ii) $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^2}$	(iii) $f(z) = \frac{\sin^2 z}{z^3}$
(iv) $f(z) = \exp\left(z + \frac{1}{z}\right)$	(v) $f(z) = \frac{1}{z^8 - z}$	(vi) $f(z) = \frac{\cos z}{z^4}$.

(27) Determine a ordem do polo de f em a e calcule $\operatorname{res}(f; a)$.

(i) $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$, $a = 0$.

(ii) $f(z) = \frac{e^{-z}}{z^{n+1}}$, $a = 0$.

(iii) $f(z) = \frac{\cos z}{z^3(z-1)}$, $a = 0$.

(iv) $f(z) = \frac{1}{z^4 - z^5}$, $a = 1$.

(v) $f(z) = \frac{\sin(1/z)}{z^4 - z^5}$, $a = 1$.

(vi) $f(z) = \frac{z}{1 - \cos z}$, $a = 0$.

(vii) $f(z) = \frac{1 - e^{3z}}{z^4}$, $a = 0$.

(viii) $f(z) = \frac{e^{2z}}{z^4 - z^5}$, $a = 1$.

Resoluções: Atenção: é necessário conferir as contas.

(i) Temos,

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots. ,$$

$$\frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^3} + \frac{-\frac{1}{3!}}{z} + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-3}}{(2n+1)!} \ .$$

Assim, 0 é um polo de ordem 3 e $\operatorname{Res}(f; 0) = -\frac{1}{6}$.

(iii) Para $f(z) = \frac{\cos z}{z^3(z-1)}$, $a = 0$, como $\cos 0 = 1$ e a função $z-1$ não se anula em $a = 0$ é natural que 0 seja polo de ordem 3. De fato,

$$\lim_{z\to 0} z^3 \frac{\cos z}{z^3(z-1)} = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{z-1} = -1 \neq 0$$

o que mostra que 0 é um polo de ordem 3 (vide Proposição).

Para computar o resíduo notemos que para uma série de Laurent com um polo de ordem $k \geq 1$ em z_0 temos

$$f(z) = ... + \frac{b_k}{(z-z_0)^k} + ... + \frac{b_1}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \,,$$

e

$$g(z) = (z-z_0)^k f(z) = b_k + b_{k-1}(z-z_0) + ... + b_1 (z-z_0)^{k-1} + ...$$

e portanto, pela fórmula para os coeficientes de uma série de potências

$$b_1 = \frac{g^{k-1}(z_0)}{(k-1)!} \,.$$

No caso em questão temos,

$$\operatorname{Res}(f;0) = \frac{g''(0)}{2!} \,,$$

$$g(z) = z^3 f(z) = \frac{\cos z}{z-1} \,, g'(z) = -\frac{\sin z}{z-1} - \frac{\cos z}{(z-1)^2} \,.$$

$$g''(z) = -\frac{\cos z}{z-1} + \frac{\sin z}{(z-1)^2} + \frac{\sin z}{(z-1)^2} + 2\frac{\cos z}{(z-1)^3}$$

e $g''(0) = -1$ e portanto, $\operatorname{Res}(f;0) = -\frac{1}{2}$ ■

(28) Seja f holomorfa em $\Omega \ni 0$ e ainda:$f(0) = 0$ e 0 é o único zero de f em Ω. Seja g também holomorfa em Ω. Então, f divide g [i.e., $g = hf$, com h holomorfa] se e somente se:

$$\operatorname{res}\left(k\frac{g}{f}\; 0\right) = 0 \quad \text{para toda função holomorfa } k \text{ em } \Omega \,.$$

(29) Ache o número de zeros satisfazendo $|z| < 1$ dos seguintes polinômios:

$$(i) \quad z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2 \quad ; \quad (ii) \quad z^4 - 5z + 1 \,.$$

(30) Se $|a| > e$, a equação $e^z = az^n$ tem n raízes no disco $|z| < 1$.