Curso: MAT 220 - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV
Unidade: Instituto de Física - USP
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Segundo Semestre de 2009

LISTA DE EXERCÍCIOS 2 - SEQUÊNCIAS

1. Determine, se existirem, $\sup X$, $\inf X$, $\max X$ e $\min X$ em cada um dos seguintes casos:

   a) $X =]a,b[\,,\ \ ]a,b]\,,\ \ [a,b[$ ou $[a,b]$; com $a,b \in \mathbb{R}$ e $a < b$.

   b) $X =]-\infty,a]\,,\ \ [a,+\infty[\,,\ \ ]-\infty,a[$ ou $X =]a,+\infty[$; com $a \in \mathbb{R}$.

   c) $X = \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $X = \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

   d) $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0 \ \text{ e } \ x^2 < 2\}$.

   e) $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \ \text{ e } \ x^2 > 2\}$.

2. Sejam $A \subset B$ dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$. Prove que $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$

3. Sejam X e Y dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ tais que $x \in X$ e $y \in Y \Rightarrow x \leq y$.

   a) Prove que $\sup X \leq \inf Y$.

   b) Prove que $\sup X = \inf Y$ se e só se, $\forall \varepsilon > 0$ existem $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $y - x < \varepsilon$.

4. Seja $\phi \neq X \subset \mathbb{R}$ e suponha que X é limitado inferiormente e defina $-X := \{-x \mid x \in X\}$. Prove que $-X$ é limitado superiormente e que $\sup(-X) = -\inf X$.

5. Seja $\phi \neq X \subset \mathbb{R}$, com X limitado. Dado $c \in \mathbb{R}_+^*$, prove que $cX = \{cx \mid x \in X\}$ é limitado e

$$\sup(cX) = c \sup X \quad \text{e} \quad \inf(cX) = c \inf X \ .$$

   Enuncie e demonstre o que ocorre se $c < 0$.

6. Dados $X, Y \subset \mathbb{R}$ não vazios e limitados, seja $X + Y := \{x + y \mid x \in X \ \text{ e } \ y \in Y\}$. Prove que:

   a) $X + Y$ é limitado, b) $sup(X + Y) = \sup X + \inf Y$, c) $\inf(X + Y) = \inf X + \inf Y$.

7. Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}_+^*$ não vazios e limitados e defina $X \cdot Y := \{xy \mid x \in X \ \text{ e } \ y \in Y\}$. Prove que $X \cdot Y$ é limitado e que

$$\sup(X \cdot Y) = \sup X \sup Y \quad \text{e} \quad \inf(X \cdot Y) = \inf X \inf Y \ .$$

8. Calcule, caso exista, $\lim_{n\to+\infty} a_n$ para

   (a) $a_n = \frac{n^3+3n+1}{4n^3+2}$.

   (b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

   (c) $a_n = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\,dx\,, \alpha \geq 1$.

   (d) $a_n = \int_0^n \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

   (e) $a_n = \frac{n+1}{\sqrt[3]{n^7+2n+1}}$.

   (f) $a_n = sen\frac{1}{n}$.

   (g) $a_n = nsen\frac{1}{n}$.

   (h) $a_n = \frac{1}{n}sen(n)$.

9. Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, prove que:

   (a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1+a_2+.....+a_n}{n} = a$.

   (b) Se $a_n > 0$ e $a > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1a_2......a_n} = a$.
   Sugestão: Em (b) utilize (a).

10. Calcule $\lim_{n\to+\infty} a_n$ para

    (a) $a_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...\frac{1}{n}}{n}$.

    (b) $a_n = \frac{2+\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}+......+\sqrt[n]{2}}{n}$.
    Sugestão: Utilize o exercício 9.

11. Calcule $\lim_{n\to+\infty} a_n$ e $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ para $a_n = \frac{1}{(n\log^2 n)^p}\ , n \geq 2\,, p \in \mathbb{R}$.

12. Calcule os limites da razão, $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, e da raíz, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$, ou ao menos um deles.

    (a) $a_n = \frac{n!}{n^n}$.

    (b) $a_n = n$.

    (c) $a_n = \frac{1}{n^p}\ , p \in \mathbb{R}$.

    (d) $a_n = \frac{1}{(\ln n)^p}$.

13. Seja $(a_n) \subset \mathbb{R}\,, a_n > 0$. Mostre que se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ então $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. Retorne ao exercício 12 e, se necessário, complete-o.

14. Mostre que, para $a, b > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = max(a,b)$.

15. Mostre que a sequência $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$,..... é convergente a 2.

Extra: Todo polinômio com coeficientes reais e de grau ímpar admite ao menos uma raíz real.

Dica para esta lista: Consultem L. H. Guidorizzi, 'Um Curso de Cálculo', Vol. 4 ou/e E. L. Lima, 'Curso de Análise', Vol. 1 ou/e P. Boulos, 'Exercícios Resolvidos e Propostos de Sequências e Séries'.