Curso: MAT 220 - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV
Unidade: IFUSP - Instituto de FÍsica da USP
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Segundo Semestre de 2009

APRESENTAÇÃO

Objetivos: Estudo de sequências e séries em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$. Funções analíticas.

1. Números Complexos.
2. Axioma do Supremo, sequências em $\mathbb{R}$. O número e e a função exponencial real.
3. Sequências em $\mathbb{C}$.
4. Alguns resultados para Somas e Séries em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$. A função exponencial complexa.
5. Séries de potênciasem $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$.
6. Derivação Complexa.
7. Funções elementares. Transformações conformes.
8. Integração Complexa. Fórmula de Cauchy e fórmula integral para as derivadas. Teorema do módulo máximo e teorema de Liouville.
9. Séries de Taylor e de Laurent. Singularidades e Cálculo de Resíduos.

Bibliografia principal:

(1) Soares, Marcio G., Cálculo em uma variável complexa, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 4. ed., 2007.

(2) Remmert, R., Theory of Complex Functions, Graduate Texts in Mathematics, v. 122.

(3) Lima, E. L., Curso de Análise, IMPA, CNPq, Rio de Janeiro, 1976.

(4) Churchill, R. V., Variáveis Complexas e Aplicações, EDUSP/McGraw-Hill, 1975.

Bibliografia Suplementar:

(5) Apostol, T. M., Calculus, 2nd. ed., Ed. Waltham/Blaisdell, 1967-1969.

(6) Boyer, Carl B.,Hisória da Matemática, Ed. Edgard Blucher, 1974.

(7) Neto, Alcides Lins, Funções de Uma Variável Complexa, IMPA, 2005.

(8) Spivak, M.,Calculus Infinitesimal, vol 2, Ed. Reverté, Barcelona, 1978.

MAT 220 - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV (IFUSP)

Capítulo 1 - NÚMEROS COMPLEXOS

1 - Sobre a origem dos números complexos.

2 - O corpo dos números complexos, $\mathbb{C}$. O plano de Argand-Gauss.

3 - O corpo $\mathbb{C}$ não é ordenável.

4 - O conjugado e o módulo de um número complexo.

5 - O argumento e a representação polar de um número complexo. Fórmula de Moivre.

6 - Potenciação e radiciação.

7 - A orientação de um paralelogramo. Uma interpretação do produto interno em $\mathbb{C}$.

Capítulo 2 - SEQUÊNCIAS

1 - Introdução.

2 - Axioma do Supremo.

3 - Topologia essencial.

4 - Sequências, Limites de Sequências e Propriedades Operatórias.

5 - Subsequências e Valores de Aderência.

6 - Sequências de Cauchy.

7 - O $\limsup$ e o $\liminf$.

8 - Exemplos Clássicos, Identidades e Desigualdades.

9 - As Funções Logaritmo e Exponencial Reais.

Apêndice 1 - Comentários Sobre os Números e e π.

Apêndice 2 - Explicitando o $\limsup$ e o $\liminf$.

Capítulo 3 - SÉRIES/CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

1 - Introdução.

1 - O Limite de uma Série Convergente. Propriedades Operatórias.

2 - Critério de Cauchy. Convergência Absoluta e Condicional.

3 - Critérios para Convergência Absoluta e de Termos Positivos.

4 - Critérios para Convergência Não Necessariamente Absoluta.

5 - Critério para Convergência de uma Série Alternada.

6 - Exemplos clássicos e séries de Taylor de algumas funções elementares.

Apêndice - Segunda Prova da Comparação Entre os Testes da Razão e da Raíz.

Apêndice - Fórmulas de Taylor com Resto Integral e Resto de Lagrange.

Capítulo 4 - SÉRIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES E SOMAS

1 - Introdução.

2 - Somabilidade, Convergência Absoluta e Comutatividade.

3 - Associatividade para Séries e para Somas de uma Sequência.

4 - Soams de uma sequência dupla e o Produto de Séries.

5 - Aplicação: A função exponencial complexa. As funções seno e cosseno complexas.

6 - O Produto de Duas Séries Não Necessariamente Absolutamente Covergentes.

7 - Somabilidade de Cesaro.

6 - Apêndice 1 - Séries Condicionalmente Convergentes (Teorema de Riemann).

Capítulo 5 - SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE FUNÇÕES E SÉRIES DE POTÊNCIAS

1 - Introdução

2 - Sequências de Funções.

3 - Séries de Funções.

4 - Séries de Potências.

Capítulo 1

NÚMEROS COMPLEXOS

1.1 - Sobre a Origem dos Números Complexos

Os breves comentários a seguir apóiam-se nas notas do Prof. César Polcino, " A emergência dos Números complexos" (15 páginas), cuja leitura é recomendada.

Tais números surgiram naturalmente, ao menos, desde a ocorrência das equações do segundo grau nas tabuletas de argila da Suméria, c. 1700 a.C. Até sua total formalização em 1833 pelo irlândes W. R. Hamilton (1805-1865) foi um árduo processo.

O fato de um número negativo não ter raíz quadrada parece ter sido sempre conhecido pelos matemáticos que se depararam com a questão. Contrariamente ao bom senso, não foram as equações do segundo grau que motivaram a aceitação de tal campo numérico mas sim as de terceiro grau. As equações de segundo grau eram vistas como a formulação matemática de um problema concreto ou geométrico e se no processo de resolução surgia uma raíz quadrada de um número negativo, isto era interpretado como prova de que tal problema não tinha solução. Como exemplo expomos a seguir um problema na Arithmetica de Diofanto (275 d.C.).

Problema: Determinar os lados de um triângulo retângulo de área igual a 7 e perímetro igual a 12 unidades. Solução: indicando por x e y os comprimentos dos catetos temos

$$\frac{xy}{2} = 7 \qquad \text{e} \qquad x^2 + y^2 = (12 - x - y)^2 \ .$$

Desenvolvendo a segunda equação temos $12x + 12y = 72 + xy$ e nesta substituindo $y = \frac{14}{x}$,

$$6x^2 - 43x + 84 = 0 \implies x = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{12}.$$

Aqui, Diofanto observa que só poderia haver solução se $(\frac{172}{2})^2 > \frac{24}{336}$. Neste contexto é supérfluo procurar um sentido para a expressão $\sqrt{-167}$.

O primeiro matemático a perceber a premência dos números complexos (ainda que, naturalmente, de modo vago e confuso) foi o italiano R. Bombelli (c. 1526-1573), autor da obra em três volumes l'Algebra (1572, Veneza). Na página 294 deste Bombelli aplica à equação $x^3 = 15x + 4$, a fórmula de Tartaglia-Cardano [1] para o cálculo das raízes, obtendo:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}\ .$$

Notando que $x = 4$ é uma raíz da equação Bombelli cogita que tal valor está implícito na expressão para as raízes e que é possível dar um sentido à expressão $2 \pm \sqrt{-121}$ e definir operações entre expressões análogas, tais como adição, multiplicação, radiciação, etc. de modo que $x = 4$ seja apenas um dos valores obtidos através destas. Assim, nasce uma situação em que apesar da presença de radicais de números negativos, existe uma solução da equação dada. É um fenômeno novo, difícil de entender mas relevante e é necessário compreende-lo com profundidade.

A partir do trabalho de Bombelli os números complexos começam a ser utilizados como um "algoritmo que funciona" para resolver equções de terceiro grau mas, ao mesmo tempo, era claro que tais números não poderiam existir. Uma das grandes dificuldades em admitir a existência dos complexos era a ausência de uma representação geométrica ou de uma interpretação física destes números. A obtenção da representação geométrica, que lhes deu a "cidadania" definitiva na matemática foi também árdua. Principiou em 1673 com o inglês J. Wallis (1616-1703) e continuou com os franceses A. de Moivre (1667-1754) e J. D'Alembert (1717-1783), o inglês R. Cotes (1682-1716), o suiço L. Euler (1707-1783), etc. e pode-se dizer que estabelecida pelo norueguês C. Wessel (1745-1818) em 1799, pelo francês J. R. Argand (1768-1822) em 1806 e o alemão C. F. Gauss (1777-1855) em 1831, que cunhou a expressão um tanto inapropriada "números complexos". A formalização completa deve-se, como já mencionamos a W. Hamilton.

1.2 - **O Corpo dos Números Complexos. O plano de Argand-Gauss.**

No que segue $\mathbb{R}$ é o corpo ordenado completo dos números reais com métrica

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)\,, \quad d(x, y) = |x - y|\ ,$$

e $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é o espaço vetorial real dado pelas operações: dados a, b, c, d e λ reais,

(A) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ (adição),

(ME) $\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$ (multiplicação por escalar).

A operação de adição tem as propriedades: dados $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{R}^2$,

(A1) $(a, b) + [(c, d) + (e, f)] = [(a, b) + (c, d)] + (e, f)$ (associativa),

(A2) $(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b)$ (comutativa),

(A3) $(a, b) + (0, 0) = (a, b)$ (existência do elemento neutro),

(A4) $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$ (existência do elemento oposto) ;

[1] Os italianos Nicollo Tartaglia (c. 1500-1557) e G. Cardano (1501-1576)

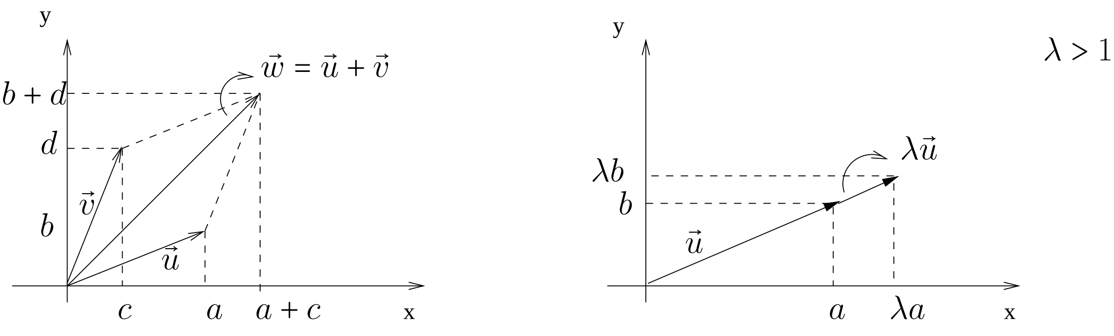


Figura 1.1: adição e multiplicação por escalar real

e a operação multiplicação por escalar: dados $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$,

(ME1) $\lambda_1[\lambda_2(a,b)] = (\lambda_1\lambda_2)(a,b)$ (ME2) $1.(a,b) = (a,b)$

(ME3) $(\lambda_1 + \lambda_2)(a,b) = \lambda_1(a,b) + \lambda_2(a,b)$ (ME4) $\lambda[(a,b) + (c,d)] = \lambda(a,b) + \lambda(c,d)$.

Com tais operações $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial real de dimensão dois.

Definiremos uma multiplicação em $\mathbb{R}^2$ adaptada às regras operatórias esperadas para a multiplicação de números complexos. Informalmente introduzindo os "números" i, $i^2 = -1$, e $a + bi$ e $c + di$, com $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, desejando manter as propriedades comutativas, associativas e distributivas para os números reais devemos esperar que

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bic + bidi = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i \ .$$

Assim, dados $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ definimos a operação

$$(a,b) * (c,d) = (ac - bd, ad + bc) \ .$$

Proposição 1.1 *O conjunto $\mathbb{R}^2$ munido das operações + e $*$, $(\mathbb{R}^2, +, *)$, é um corpo.*

Prova: As propriedades da adição decorrem de $(A1)$, $(A2)$, $(A3)$ e $(A4)$. Verifiquemos as propriedades abaixo: dados $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R}^2$ temos,

(M1) $(a,b) * [(c,d) * (e,f)] = [(a,b) * (c,d)] * (e,f)$ (associativa),

(M2) $(a,b) * (c,d) = (c,d) * (a,b)$ (comutativa),

(M3) $(a,b) * (1,0) = (a,b)$ (existência do elemento neutro).

(M4) $\forall (a,b) \neq (0,0)\,, \exists (u,v) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(a,b)*(u,v) = (1,0)$ (existência do elemento inverso).

(D) $(a,b) * [(c,d) + (e,f)] = (a,b) * (c,d) + (a,b) * (e,f)$ (distributiva).

Verificação de $(M1)$:

$$\begin{aligned}
(a,b) * [(c,d) * (e,f)] &= (a,b) * (ce - df, cf + de) = \big(a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)\big) \\
&= (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf) \\
&= \big((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e\big) \\
&= (ac - bd, ad + bc) * (e,f) = [(a,c) * (b,d)] * (e,f) \ .
\end{aligned}$$

As propriedades $(M2)$ e $(M3)$ são consequências óbvias da definição da operação $*$.

Verificação de $(M4)$: basta resolvermos o sistema linear real nas variáveis u e v,

$$au - bv = 1 \ , \ \ bu + av = 0 \ .$$

Tal sistema têm determinante $a^2 + b^2 \neq 0$ e solução única dada por,

$$u = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{vmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{vmatrix} = \frac{a}{a^2+b^2} \quad , \quad v = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -\frac{b}{a^2+b^2} \ .$$

Verificação de (D):

$$\begin{aligned} (a,b) * [(c,d)+(e,f)] &= (a,b) * (c+e, d+f) = \big(a(c+e) - b(d+f), a(d+f) + b(c+e)\big) \\ &= \big((ac-bd) + (ae-bf), (ad+bc) + (af+be)\big) \\ &= (ac-bd, ad+bc) + (ae-bf, af+be) = (a,b)*(c,d) + (a,b)*(e,f) \ \blacksquare \end{aligned}$$

Definição 1.2 $(\mathbb{R}^2, +, *)$ *é o* **corpo dos números complexos***, indicado por* $\mathbb{C}$.

Nos referiremos a $\mathbb{C}$ como corpo dos números complexos ou **plano complexo**. Por esta construção, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$ são conjuntos iguais e o mesmo espaço vetorial. Ao enfatizarmos as estruturas de espaço vetorial ou corpo escreveremos $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}$, respectivamente. Mostramos abaixo que $\mathbb{C}$ contém um subcorpo isomorfo a $\mathbb{R}$, justificando a notação $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Consideremos a aplicação, evidentemente injetora,

$$j : a \in \mathbb{R} \longmapsto (a, 0) \in \mathbb{C} \ .$$

É claro que j preserva as operações de adição e multiplicação, isto é, $\forall a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} j(a+b) = (a+b, 0) = (a,0) + (b,0) = j(a) + j(b)\,, \\ j(ab) = (ab, 0) = (a,0) * (b,0) = j(a)j(b) \ . \end{cases}$$

Assim, j é um isomorfismo de corpos e $\mathrm{Im}(j) = \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}$ é subcorpo de $\mathbb{C}$ isomorfo a $\mathbb{R}$.

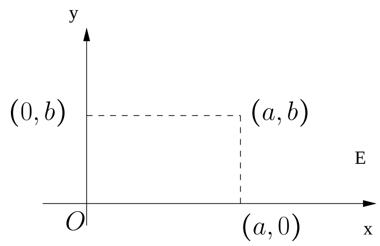


Figura 1.2: Eixo x isomorfo a $\mathbb{R}$ por j

Por tal isomorfismo não há diferença algébrica entre $\mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}(j)$ e passamos a identificá-los, não distinguindo entre um número real a e $j(a) = (a, 0)$.

A multiplicação por escalar real herdada de $\mathbb{R}^2$ não conflita com $*$: se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b) \ \text{ e } \ \lambda * (a,b) = (\lambda, 0) * (a,b) = (\lambda a - 0.b\,, \lambda b + 0.a) = (\lambda a, \lambda b) \ .$$

Doravante, omitiremos o símbolo $*$ e escreveremos $(a,b)(c,d)$ para $(a,b)*(c,d)$.

O corpo $\mathbb{C}$ tem três elementos distinguidos, a saber,

$$(0,0)\,, \quad (1,0)\,, \quad (0,1)\ .$$

Os elementos $0=(0,0)$ e $1=(1,0)$ são, respectivamente, os neutros da adição e da multiplição em $\mathbb{C}$. Já $(0,1)$ satisfaz $(0,1)(0,1)=(0.0-1.1, 0.1+1.0)=(-1,0)=-1$ e é indicado por i. Logo, $i^2=-1$ e $\mathbb{C}$ é uma extensão do corpo $\mathbb{R}$ na qual $-1=(-1,0)$ tem raíz quadrada $i\in\mathbb{C}$ e escrevemos $i=\sqrt{-1}$. Segue que todo número real a admite raíz quadrada complexa: se $a\geq 0$ já o sabemos e se $a<0$ temos $(i\sqrt{|a|})^2=-|a|=a$. Mais adiante veremos que todo número complexo possui m raízes m-ésimas em $\mathbb{C}$, $m\in\mathbb{N}^*$, o que provará que o problema da radiciação, com muitas particularidades em $\mathbb{R}$, é simplesmente e completamente solúvel em $\mathbb{C}$.

Pelas identificações acima citadas podemos escrever,

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+b(0,1)=a+bi\ .$$

Com esta notação temos,

$$(a+ib)(c+id)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i\ .$$

É usual indicar um número complexo por z, w e ζ. Se $z=(a,b)=a+ib\in\mathbb{C}$, a é a **parte real de** z e b é a **parte imaginária de** z, denotadas por $Re(z)$ e $Im(z)$, respectivamente, isto é,

$$z=Re(z)+iIm(z)\,,\forall z\in\mathbb{C}\ .$$

A representação geométrica de $z\in\mathbb{C}$ é igual a de $\mathbb{R}^2$, seja pelo ponto do plano cujas coordenadas são, respectivamente, as partes real e imaginária de z, dito **afixo de** z, seja pelo vetor com origem coincidente com a origem do sistema de coordenadas e extremidade o afixo de z.

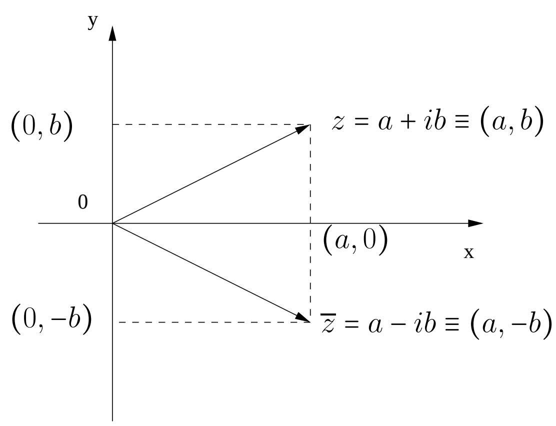


Figura 1.3: Representação geométrica de z e de $\overline{z}=a-ib$

O eixo das abscissas é dito **eixo real** e o das ordenadas, $\{(0,b):b\in\mathbb{R}\}$, **eixo imaginário**. A representação de $\mathbb{C}$ como pontos em $\mathbb{R}^2$ é chamada de **plano de Argand-Gauss**.

1.4 - **O corpo $\mathbb{C}$ não é ordenável.**

Intuitivamente, um corpo K é ordenado se existe um subconjunto de $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} - \{0\}$ que pode ser chamado de conjunto dos "números positivos de $\mathbb{K}$".

Definição 1.3 *O corpo* $(\mathbb{K}, +, .)$ *é um conjunto ordenado se existir* $P \subset \mathbb{K}^*$ *tal que,*

(a) $\forall x \in \mathbb{K}$, *apenas uma das três condições ocorre: ou* $x = 0$ *ou* $x \in P$ *ou* $-x \in P$*;*

(b) $\forall x, y \in P$ *temos,* $x + y \in P$ *e* $xy = x\,.\,y \in P$.

Indicamos $x \in P$ por $x > 0$ e $x > y$ por $x - y > 0$.

Teorema 1.4 *O corpo* $\mathbb{C}$ *não pode ser ordenado.*

Prova: Suponhamos que exista $P \subset K^*$ satisfazendo as condições (a) e (b) da Definição 1.3

Se $1 < 0$ (i.e, $-1 \in P$), por (b), $(-1)(-1) = 1 \in P$, o que contradiz (a). Portanto, $1 > 0$.

Se $z \in \mathbb{C}^*$ temos: se $z \in P$ então $z.z = z^2 \in P$; se $z \notin P$ então $-z \in P$ e $(-z)(-z) = z^2 \in P$. Logo, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $z^2 > 0$ e, como $1 > 0$, por (b) segue que $z^2 + 1 > 0$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$ e assim,

$$i^2 + 1 = 0 \in P \quad \lightning$$

1.4 - **O conjugado e o módulo de um número complexo.**

Definição 1.5 *O* **conjugado** *de* $z = a + bi \in \mathbb{C}$ *é:* $\overline{z} = a - bi$.

Valem então as relações,

$$Re(z) = Re(\overline{z}) \text{ e } Im(z) = -Im(\overline{z}) \ .$$

Geométricamente (vide figura 1.3) $\overline{z}$ é o simétrico de z em relação ao eixo real. É claro que

$$Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \text{ e } Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i} \ .$$

A aplicação $z \in \mathbb{C} \longmapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$, dita **conjugação**, é automorfismo de corpo que mantém $\mathbb{R}$ fixo.

Proposição 1.6 Propriedades da conjugação:

(a) Dados $\forall z, w \in \mathbb{C}$ *temos,*

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}\,,\ \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}\,,\ \overline{\overline{z}} = z \quad e,\ \overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}\ .$$

(b) Dado $z \in \mathbb{C}^*$*,*

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}\ .$$

Prova: (a) Segue trivialmente da definição de conjugado.

(b) Como $z\,\frac{1}{z} = 1$, por (a) temos $\overline{z}\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{1} = 1$. Logo, $\overline{z}^{-1} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$ ■

Os complexos bi, $b \in \mathbb{R}$, são ditos **imaginários puros** e $z \in \mathbb{C}$ é um tal se, e só se, $z = -\overline{z}$.

Definição 1.7 *O* **módulo** *de* $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, *é:* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$.

Geometricamente, o módulo de $z \in \mathbb{C}$ é a distância do afixo de z à origem.

Proposição 1.8 (Propriedades) *Sejam* $z, w \in \mathbb{C}$,

(a) $|z| = |\overline{z}|$ *e* $z\overline{z} = |z|^2$.

(b) $|zw| = |z||w|$ *e, se* $z \neq 0$, $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$.

(c) $|Re(z)| \leq |z|$, $|Im(z)| \leq |z|$ *e* $|z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$.

Prova: Seja $z + a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Segue imediatamente das identidades $|a + ib| = |a - ib|$ e $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$.

(b) Por (a) e pela Proposição 1.6(a) temos, $|zw|^2 = zw\overline{zw} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2$; donde a primeira afirmação e desta, se $z \neq 0$, segue que $1 = |z\frac{1}{z}| = |z||\frac{1}{z}|$ e portanto, $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$.

(c) É trivial verificar que $|a|, |b| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$ ■

Corolário 1.9 *Se* $z \in \mathbb{C}^*$,

(a) $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ *e* $|\overline{\frac{1}{z}}| = \frac{1}{|\overline{z}|}$. *(b) Se* $|z| = 1$ *então* $z^{-1} = \overline{z}$.

Prova: (a): A primeira afirmação segue da Proposição 1.8(a) pois, $z\frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1$. Quanto à segunda, pelas Proposições 1.8(a) e 1.8(b) temos $|\overline{\frac{1}{z}}| = |\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{|\overline{z}|}$. (b): Consequência de (a) ■

Pela identificação $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$, como espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, destacamos o resultado a seguir.

Proposição 1.10 *A função módulo* $|.| : \mathbb{C} \longrightarrow [0, +\infty)$ *é uma* **norma** *sobre* $\mathbb{C}$. *Isto é,*

(a) $|z| = 0$ *se, e só se,* $z = 0$.

(b) $|\lambda z| = |\lambda z|, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}$.

(c) $|z + w| \leq |z| + |w|$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$ *(desigualdade triangular).*

Prova:

(a) Evidentemente, $|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} = 0 \Leftrightarrow Re(z) = Im(z) = 0$.

(b) Um caso particular da proposição 1.3(b).

(c) Não é difícil ver que,

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z + w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} = |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2Re(z\overline{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\ &= (|z| + |w|)^2 \ . \end{aligned}$$

Donde, $|z + w| \leq |z| + |w|$ ■

Corolário 1.11 $|z - w| \geq \big||z| - |w|\big|$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$.

Prova: Pela desigualdade triangular, $|z| = |(z - w) + w| \leq |z - w| + |w|$ e então, $|z - w| \geq |z| - |w|$. Mutatis mutandis, $|w - z| \geq |w| - |z|$ e portanto, $|z - w| = |w - z| \geq |w| - |z|$ ■

A Proposição 1.10 (c) e seu corolário são, respectivamente, a **primeira** e a **segunda desigualdade triangular** e expressam as seguintes propriedades geométricas num triângulo:

- o comprimento de um dos lados é menor que soma dos comprimentos dos outros dois.
- o comprimento de um dos lados é maior que o módulo da diferença dos outros dois.

1.5 - **O argumento e a representação polar de um número complexo. A interpretação geométrica para o produto em $\mathbb{C}$.**

Nesa seção utilizamos conceitos geométricos e trigonométricos para a apresentação do argumento de um número em $\mathbb{C}$. Na seção ??, abordaremos tal tópico de forma puramente analítica.

Um número $z \in \mathbb{C}^*$, $z = a + ib \neq 0$ tem afixo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que projetado sobre o círculo unitário $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ determina um único $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que (vide figura 1.4)

$$\frac{z}{|z|} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = (\cos\theta, \sin\theta) \ .$$

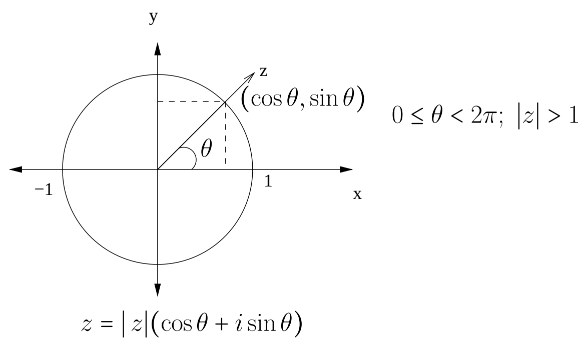


Figura 1.4: O argumento de z

Notemos que θ correspondente à medida em radianos do ângulo determinado pelo semi-eixo positivo dos $x's$, $\mathbb{R}^+ \times \{0\}$, e o segmento de reta unindo a origem O ao afixo de z, medido a partir do semi-eixo e no sentido anti-horário. É claro que,

$$\begin{cases} z = |z|\frac{z}{|z|} = |z|(cos\theta + i\sin\theta) = |z|cos\theta + i|z|\sin\theta\,, \\ a = Re(z) = |z|\cos\theta \quad , \quad b = Im(z) = |z|\sin\theta \ . \end{cases}$$

Todo número $\varphi = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, satisfaz $z = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi$ e é dito um **argumento**, ou **amplitude**, de z e é indicado por $arg(z)$. Inversamente, para φ arbitrário satisfazendo $z = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi$ temos $\cos\varphi = \cos\theta$, $\sin\varphi = \sin\theta$ e $\cos(\varphi - \theta) = \cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. Portanto, $\varphi - \theta = 2k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Definição 1.12 *Seja* $z \in \mathbb{C} - \{0\}$.

- *O par* $(|z|, arg(z))$ *é uma* **representação (ou forma) polar** *de* z.
- *O* **argumento principal** *de* z, $Arg(z)$, *é o único argumento de* z *em* $(-\pi, \pi]$.

Observações:

(a) Se z tem forma polar (r, θ) escrevemos $z = (r, \theta)_o$.

(b) Por convenção e praticidade a forma polar de $z = 0$ é $(0, \theta)$, com $\theta \in \mathbb{R}$ e arbitrário.

(c) A escolha da função argumento principal varia segundo as conveniências e autores. Em outros textos é utilizado o domínio $[-\pi, \pi)$ ou $[0, 2\pi)$.

Abaixo mostramos que a forma polar simplica a efetuação do produto de números complexos e, ainda, permite uma representação geométrica intuitiva de tal cálculo.

Proposição 1.13 *Sejam* $z_i = (r_i, \varphi_i)_o$, $i = 1, 2$. *Então,*

(a) $z_1 z_2 = (r_1 r_2, \varphi_1 + \varphi_2)_o$.

(b) $\overline{z_1} = (r_1, -\varphi_1)_o$.

(c) Se $z_1 \neq 0$, $\frac{1}{z_1} = (\frac{1}{r_1}, -\varphi_1)_0$.

Prova: (a) Temos,

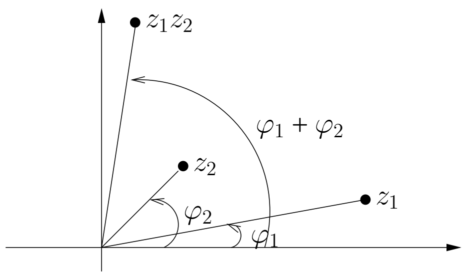
$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\, r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2\big[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2)\big] \\ &= r_1 r_2\big[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big]. \end{aligned}$$

(b) Como $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ então, $\overline{z_1} = r_1(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1) = r_1\,[\cos(-\varphi_1) + i\sin(-\varphi_1)]$.

(c) Pelas Proposições 1.8 (a) e 1.13 (b) temos,

$$\frac{1}{z_1} = \frac{\overline{z_1}}{z_1\overline{z_1}} = \frac{r_1\cos(-\varphi_1) + ir_1\sin(-\varphi_1)}{r_1^2} = \frac{1}{r_1}\big[\cos(-\varphi_1) + i\sin(-\varphi_1)\big] \blacksquare$$

Assim, o vetor z_1 é obtido aplicando ao vetor z_2, ambos representados com extremidade inicial a origem, uma rotação de ângulo φ_1 seguida da homotetia de razão r_1.



$|z_1| > 1$, $|z_2| > 1$

$0 < arg z_1$, $arg z_2 < \frac{\pi}{2}$

$0 < arg z_1 + arg z_2 < \frac{\pi}{2}$

Figura 1.5: Representação geométrica do produto em $\mathbb{C}$

1.6 - **Potenciação e Radiciação em $\mathbb{C}$.**

Definição 1.14 *Se* $z \in \mathbb{C}^*$ *e* $m \in \mathbb{Z}$, *a* **potência m-ésima***de* z, *denotada* z^m, *é definida por:*

(a) $z^0 = 1$ *e* $z^{m+1} = z^m . z$, *se* $m \in \mathbb{N}$ *(b)* $z^m = (z^{-1})^{-m}$, *se* $m \in \mathbb{Z}$ *e* $m < 0$.

Convencionamos $0^m = 0$, se $m \in \mathbb{N}^*$. Valem as regras operatórias usuais para potências de expoentes inteiros e base complexas.

Proposição 1.15 *Sejam $z, w \in \mathbb{C}^*$ e $m, n \in \mathbb{Z}$. Então,*

(a) $z^m z^n = z^{m+n}$ *(b)* $(zw)^m = z^m w^n$ *(c)* $(z^m)^n = z^{mn}$

(d) $z^{-m} = \frac{1}{z^m}$ *(e)* $\frac{z^m}{z^n} = z^{m-n}$ *(f)* $\left(\frac{z}{w}\right)^m = \frac{z^m}{w^m}$.

Prova: Segue, por indução, da Definição 1.14 e a deixamos ao leitor ∎

Com a representação polar simplificamos e interpretamos geométricamente a potenciação.

Proposição 1.16 (Fórmula de Moivre) *Se $z = (r, \varphi)_o \in \mathbb{C}^*$ e $m \in \mathbb{Z}$ então $z^m = (r^m, m\varphi)_o$. Isto é,*

$$(r\cos\varphi + ir\sin\varphi)^m = r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi)\ .$$

Prova:

O caso $m = 0$ é trivial pois $z^0 = 1 = 1(\cos 0 + i\sin 0) = r^0(\cos 0 + i\sin 0)$.

O caso $m > 0$ segue, por indução, da Proposição 1.13.

Se $m < 0$, pela Proposição 1.15(d) temos $z^m = \frac{1}{z^{-m}}$ e, pelo caso anterior, $z^{-m} = (r^{-m}, -m\varphi)_o$. Logo, pela Proposição 1.13(b), $\frac{1}{z^{-m}} = (\frac{1}{r^{-m}}, m\varphi)_o = (r^m, m\varphi)_o$ ∎

Teorema 1.17 *Se $z \in \mathbb{C}^*$, com forma polar $(r, \varphi)_o$, e $m \in \mathbb{N}^*$, z tem só as m* **raízes m-ésimas***:*

$$\sqrt[m]{r}\left(\cos(\frac{\varphi}{m} + \frac{2k\pi}{m}) + i\sin(\frac{\varphi}{m} + \frac{2k\pi}{m})\right),\ k = 0, 1, ..., m-1\ .$$

Prova:

Inicialmente observemos que pela fórmula de Moivre temos, para qualquer $k' \in \mathbb{Z}$,

$$\left[\sqrt[m]{r}\left(\cos(\frac{\varphi}{m} + \frac{2k'\pi}{m}) + i\sin(\frac{\varphi}{m} + \frac{2k'\pi}{m})\right)\right]^m = r\left(\cos m(\frac{\varphi}{m} + \frac{2k'\pi}{m}) + i\sin m(\frac{\varphi}{m} + \frac{2k'\pi}{m})\right) =$$

$$= r\,(\cos(\varphi + 2k'\pi) + i\sin(\varphi + 2k'\pi)) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = z\ .$$

Ainda, se $w = (\rho, \psi)_o$, é raíz m-ésima de z então $(r, \varphi)_o = z = w^m = (\rho^m, m\psi)_o$. Logo, $\rho^m = r$ e $m\psi - \varphi = 2k'\pi$, para algum $k' \in \mathbb{Z}$. Isto é, $(\rho, \psi) = (\sqrt[m]{r}, \frac{\varphi}{m} + \frac{2k'\pi}{m})$. Escrevendo $k' = pm + k$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $k = 0, 1, ..., m-1$ obtemos,

$$\psi = \frac{\varphi}{m} + \frac{2k'\pi}{m} = \frac{\varphi}{m} + \frac{2pm\pi + 2k\pi}{m} = (\frac{\varphi}{m} + \frac{2k\pi}{m}) + 2p\pi\ ;$$

logo, $\frac{\varphi}{m} + \frac{2k\pi}{m} = arg(w)$ e w tem a forma no enunciado. Por fim, os números descritos no enunciado são distintos: dados dois deles, com argumentos distintos, a diferença destes é $\frac{2(k_1-k_2)\pi}{m}$ $[k_1, k_2 \in \{0, 1, ..., m-1\}]$, que não pertence a $2\pi\mathbb{Z}$ pois $\frac{k_1-k_2}{m} \notin \mathbb{Z}$ já que $0 < \frac{|k_1-k_2|}{m} \leq \frac{m-1}{m} < 1$ ∎

Exemplos: Vide também figura 1.6 que segue.

(a) As raízes cúbicas de i tem forma polar $(1, \frac{\frac{\pi}{2}}{3} + \frac{2k\pi}{3})_o$, $k = 0, 1, 2$.

(b) As raízes sextas de 1 tem forma polar $(1, \frac{2k\pi}{6}) = (1, \frac{k\pi}{3})_o$, $0 \leq k \leq 5$.

(c) Os afixos das m raízes de $z \neq 0$ formam um polínogono regular.

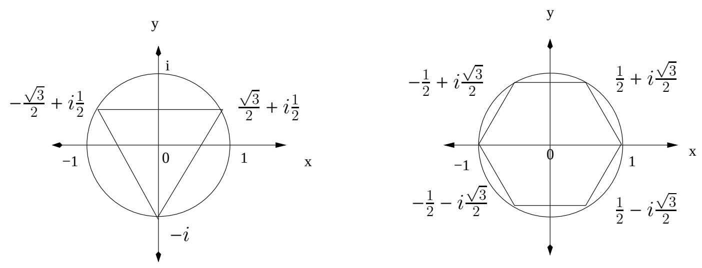


Figura 1.6: Representação geométrica das raízes nos exemplos (a) e (b)

1.7 - **Área orientada de um paralelogramo. O produto interno em $\mathbb{C}$.**

Nesta seção, $\vec{u}$ denota um vetor em $\mathbb{R}^2$. Dado (a,b) no plano cartesiano, indicamos o vetor representado pelo segmento com extremidade inicial a origem deste plano e final (a,b) por $\langle a,b\rangle$.

Dois vetores $\vec{u} = \langle a,b\rangle$ e $\vec{v} = \langle c,d\rangle$, não paralelos e em $\mathbb{R}^2$, determinam um paralelogramo Ω que supomos, inicialmente, no primeiro quadrante. Seja $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \langle a+b, c+d\rangle$. Consideremos a representação de Ω [numa segunda e última representação as posições de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são trocadas],

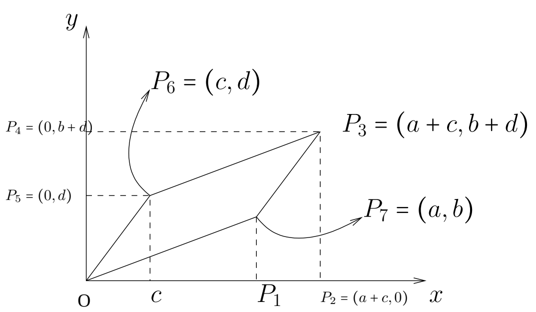


Figura 1.7: Determinante/Área

Considerando os pontos P_i, $1 \leq i \leq 7$, a área delimitada por Ω, $A(\Omega)$, é dada por,

$A(\Omega) = A(OP_2P_3P_4) - A(OP_1P_7) - A(P_1P_2P_3P_7) - A(P_3P_4P_5P_6) - A(P_5OP_6)$,

$A(P_1P_2P_3P_7) = \frac{(b+b+d)c}{2} = bc + \frac{cd}{2}$, $A(P_3P_4P_5P_6) = \frac{(c+a+c)b}{2} = bc + \frac{ab}{2}$,

$A(OP_2P_3P_4) = (a+c)(b+d) = ab + ad + bc + cd$,

$A(OP_1P_7) = \frac{ab}{2}$ e $A(P_5OP_6) = \frac{cd}{2}$.

Logo,

$$A(\Omega) = ab + ad + bc + cd - \frac{ab}{2} - bc - \frac{cd}{2} - bc - \frac{ab}{2} - \frac{cd}{2} = ad - bc = D = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

A seguir, associamos uma área ou ao determinante D se seu valor (também dito determinante) é positivo ou a D', obtido trocando as colunas de D uma pela outra, se D é negativo.

Definição 1.18 *O* **ângulo entre dois segmentos** $\overline{AB}$ *e* $\overline{AC}$ *no plano é o menor ângulo* θ, $0 \leq \theta \leq \pi$, *unindo* B *e* C.

Definição 1.19 *O* **ângulo entre dois vetores** $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ *é o ângulo entre dois segmentos* $\overline{AB}$ *e* $\overline{AC}$*, representantes de* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$*, respectivamente. Fixas tais representações, o* **(menor) ângulo entre** $\vec{u}$ **e** $\vec{v}$**, orientado de** $\vec{u}$ **para** $\vec{v}$*, é o ângulo entre* $\overline{AB}$ *e* $\overline{AC}$*,* **orientado de** B **para** C*.*

Mantendo a notação acima temos então o importante resultado abaixo.

Proposição 1.20 *Se* $\vec{u}$ *corresponde à 1ª coluna do determinante,* $\vec{v}$ *à 2ª,* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *não paralelos, e* θ*, o menor ângulo entre* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$*, orientado de* $\vec{u}$ *para* $\vec{v}$*, tem sentido anti-horário,*

$$D = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc > 0 \ .$$

Caso contrário, se a orientação de θ *é no sentido horário,* $ad - bc < 0$*.*

Prova: Lembremos que medimos ângulos em $\mathbb{R}^2$ no sentido anti-horário e a partir do eixo Ox. Suponhamos, primeiro, que θ esteja orientado no senti anti-horário.

Se α é o ângulo de Ox a $\vec{u}$ e β o ângulo de Ox a $\vec{v}$, $a\,, c \neq 0$, temos $\tan\alpha = \frac{b}{a}$ e $\tan\beta = \tan\frac{d}{c}$.

Caso 1: $\vec{u}$ no primeiro quadrante.

(1a) Para $\vec{v}$ no primeiro quadrante temos (vide figura anterior),

$$0 < \tan\alpha = \frac{b}{a} < \frac{d}{c} = \tan\beta \ , \quad bc < ad \ , \quad ad - bc > 0 \ ,$$

onde na segunda afirmação utilizamos $ac > 0$.

(1b) Para $\vec{v}$ no segundo quadrante temos $c < 0$, $d > 0$, $ac < 0$ e,

$$\tan\beta = \frac{d}{c} < 0 < \frac{b}{a} = \tan\alpha \ , \quad ad > bc \ .$$

(1c) Para $\vec{v}$ no terceiro quadrante, com $0 < \beta - \alpha < \pi$, temos $c < 0$, $d < 0$, $ac < 0$ e observando o valor da tangente no círculo trigonométrico (faça um esboço),

$$0 < \tan\beta = \frac{d}{c} < \frac{b}{a} = \tan\alpha \ , \quad ad > bc \ .$$

Caso 2: $\vec{u}$ no segundo quadrante logo, $a < 0$ e $b > 0$.

(2a) Para $\vec{v}$ no segundo quadrante temos, $c < 0$, $d > 0$, $ac > 0$ e (faça um esboço),

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} < \frac{d}{c} = \tan\beta < 0 \ , \quad bc < ad \ .$$

(2b) Para $\vec{v}$ no terceiro quadrante então $c < 0$, $d < 0$, $ac > 0$ e,

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} < 0 < \frac{d}{c} = \tan\beta \ , \quad bc < ad \ .$$

(2c) Para $\vec{v}$ no quarto quadrante, com $0 < \beta - \alpha < \pi$, temos $c > 0$, $d > 0$, $ac < 0$ e observando o valor da tangente no círculo trigonométrico (faça um esboço),

$$\tan\beta = \frac{d}{c} < \frac{b}{a} = \tan\alpha < 0 \ , \quad ad > bc \ .$$

Casos 3 e 4: Para $\vec{u}$ no 3º [4º] quadrante, os sub-casos com $\vec{v}$ no 3º, 4º e 1º [4º, 1º e 2º] quadrantes são análogos a (1a), (1b) e (1c) [(2a), (2b) e (2c)], respectivamente.

Po fim, se θ tem o sentido horário, trocando as colunas de D recaímos na suposição anterior e obtemos um determinante $D' > 0$. Logo, $D = -D' < 0$ ∎

Definição 1.21 *O* **par ordenado de vetores** $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ *é* **positivamente (negativa/e) orientado** *se o menor ângulo entre eles, orientado de $\vec{u}$ para $\vec{v}$, tem sentido anti-horário (horário).*

Definição 1.22 *O* **paralelogramo** *determinado pelo par ordenado $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é* **positivamente orientado** *ou* **negativamente orientado** *segundo a orientação do par (ordenado) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.*

Corolário 1.23 *Na Prop. 1.20, se θ tem sentido anti-horário [horário], D é a área [o oposto da área] do paralelogramo positiva/e [negativa/e] orientado determinado pelo par ordenado $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.*

Prova: É deixada ao leitor ∎

Corolário 1.24 *Se $z_j = x_j + iy_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2$, e θ é o menor ângulo de $\langle x_1, y_1\rangle$ para $\langle x_2, y_2\rangle$,*

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \pm\, |z_1||z_2|\, sen\theta\, ;$$

o sinal adotado é positivo se θ tem o sentido anti-horário e negativo caso contrário.

Prova: Pela Proposição 1.20 e Corolário 1.23, o valor absoluto de D é a área do paralelogramo determinado pelo par ordenado $\{\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle\}$. Por geometria elementar, tal área é $l_1 l_2 \sin\theta$, sendo $l_j = |\langle x_j, y_j\rangle| = |z_j|$, $j = 1, 2$. Isto é, $|D| = |z_1||z_2|\sin\theta$; donde, a tese ∎

A seguir, deixando ao leitor verificar que $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ (i.e., espaço vetorial complexo) mostremos que analogamente ao $\mathbb{R}^2$ temos o importante resultado abaixo.

Proposição 1.25 *A função $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \ni (z, w) \mapsto (z|w) = z\overline{w} \in \mathbb{C}$, satisfaz, para $z's, w's$ e λ em $\mathbb{C}$,*

(a) $(z_1 + z_2|w) = (z_1|w) + (z_2|w)$ *e* $(\lambda z|, w) = \lambda(z|w)$ *[linearidade na 1ª variável].*

(b) $(z|w_1 + w_2) = (z|w_1) + (z|w_2)$ *e* $(z|\lambda w) = \overline{\lambda}(z|w)$ *[linear-conjugada na 2ª variável].*

(c) $(z|w) = \overline{(w|z)}$ *[hermitiana simétrica ou conjugada-simétrica].*

(d) $(z|z) \geq 0,\ \forall z \in \mathbb{C}$ *[positiva]* *e* $(z|z) = 0 \Rightarrow z = 0$ *[definida].*

Prova: Segue das propriedades da adição, multiplicação e conjugação e a deixamos ao leitor ∎

A função acima é o **produto interno** canônico em $\mathbb{C}$ ou **produto interno hermitiano**. Abaixo, expressamos o produto interno de dois números complexos em termos de suas coordenadas cartesianas e também utilizando suas representações polares.

Proposição 1.26 *Para $z_j = x_j + iy_j$, com forma polar $(|z_j|, \theta_j)$, $x_j, y_j, \theta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, temos,*

$$(z_1|z_2) = z_1\overline{z_2} \;=\; (x_1x_2 + y_1y_2) - i\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = |z_1||z_2|cos(\theta_1 - \theta_2) \,+\, i|z_1||z_2|sen(\theta_1 - \theta_2)\ .$$

Prova: Trivial pois a forma polar de $\overline{z_2}$ é $(|z_2|, -\theta_2)$ e a de $z_1\overline{z_2}$ é $(|z_1||z_2|, \theta_1 - \theta_2)$ ∎

Na figura que segue representamos z_1, z_2 e os ângulos envolvidos.

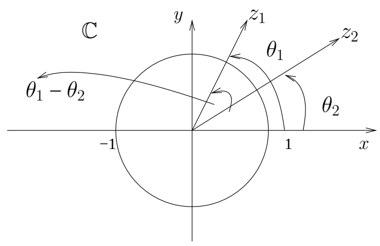


Figura 1.8: $\theta_1 - \theta_2 = arg(\,(z_1|z_2\,))$

Corolário 1.27 *Se* $z_j = x_j + iy_j \in \mathbb{C}$*,* $j = 1, 2$*, e* $\gamma = arg(z_1) - arg(z_2)$ *então,*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = -|\,z_1|\,|\,z_2|\,\sin\gamma.$$

Prova: Como $arg(z_j) = \theta_j + 2k_j\pi$, $k_j \in \mathbb{Z}$, segue que $\sin\gamma = \sin(\theta_1 - \theta_2)$ ■

Corolário 1.28 *Com a notação do Corolário1.27, seja* θ *o menor ângulo entre* $\langle x_1, y_1\rangle$ *e* $\langle x_2, y_2\rangle$*, orientado de* $\langle x_1, y_1\rangle$ *para* $\langle x_2, y_2\rangle$*. Notemos que* $\theta_1 - \theta_2 \in [-2\pi, 2\pi]$*.*

(a) $\theta_1 - \theta_2 \in [0, \pi] \Rightarrow \theta = \theta_1 - \theta_2$

(b) $\theta_1 - \theta_2 \in [\pi, 2\pi] \Rightarrow \theta = 2\pi - (\theta_1 - \theta_2)$.

(c) $\theta_1 - \theta_2 \in [-\pi, 0] \Rightarrow \theta = -(\theta_1 - \theta_2)$

(d) $\theta_1 - \theta_2 \in [-2\pi, -\pi] \Rightarrow \theta = 2\pi + (\theta_1 - \theta_2)$.

Prova: Elementar e a deixamos ao leitor como exercício ■

Sugerimos verificar: Nos casos (b) e (c), θ tem sentido anti-horário, $-\theta = arg\, z_1 - arg\, z_2$, para determinados $arg\, z_1$ e $arg\, z_2$, e $-\sin(\theta_1 - \theta_2) = \sin\theta$. Nos casos (a) e (d) θ tem sentido horário, $\theta = arg\, z_1 - arg\, z_2$, para determinados $arg\, z_1$ e $arg\, z_2$, e $-\sin(\theta_1 - \theta_2) = -\sin\theta$.

Pelo Corolário 1.24 e Proposição 1.26, se $\vec{u} = \langle x_1, y_1\rangle$ e $\vec{v} = \langle x_2, y_2\rangle$ correspondem a z_1 e z_2, respectivamente, e $\vec{u}\cdot\vec{v}$ indica o **produto interno em** $\mathbb{R}^2$ de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ temos,

$$\begin{cases} Re\,(z_1|z_2) = \vec{u}\cdot\vec{v} = \text{comprimento da projeção de } \vec{u} \text{ sobre } \vec{v} \\ -Im\,(z_1|z_2) = \pm\,(\text{área do paralelogramo determinado pelo par } \{\vec{u},\vec{v}\})\,, \\ \qquad\qquad\qquad \text{o sinal + ou } - \text{ segundo } \{\vec{u},\vec{v}\} \text{ é positiva/e ou negativa/e orientado .} \end{cases}$$

Capítulo 2

SEQUÊNCIAS

2.1 - Introdução

O estudo de sequências numéricas e de funções se insere no desenvolvimento do que veio a ser chamado "aritmetização da análise´´ durante o século XIX, sendo que a análise foi vista pelo inglês I. Newton (1642-1727) e pelo alemão G. Leibnitz (1646-17156) como o estudo dos processos infinitos e de grandezas contínuas tais como comprimentos, áreas, velocidade, etc. O conceito de função é o mais importante neste ramo da matemática e a princípio não era claro.

No meio do século XVIII o suiço D. Bernoulli (1700-1782), ou Daniel I, soluciona o problema da corda vibrante com uma soma infinita de funções trigonométricas, diferindo das soluções de D'Alembert (1717-1783) e de Euler e em 1822 o francês J. Fourier (1768-1830) em Théorie analytique de la chaleur descobre que toda função pode ser escrita como soma infinita de funções trigonométricas (a série de Fourier). Sua obra foi considerada com certa imprecisão e para elucida-la, e responder a outras questões presentes à época, torna-se premente precisar os conceitos de função, convergência e o que é um número real.

Ilustremos com um problema de convergência de uma sequência do início do século XVIII.

O suiço J. Bernoulli (1654-1705), ou Jacques I, tio de Daniel I, em obra póstuma de 1713 ao fornecer a primeira prova adequada, por indução matemática ou, ainda, indução de Fermat, devido ao francês P. Fermat (1601-1665)[1], do teorema binomial para potências inteiras positivas é o primeiro a dizer que sequência $(1+1/n)^n$ converge quando $n \to \infty$. Como dada uma taxa t de juros, aplicando n vezes um capital inicial C, a cada vez com a taxa de juros t/n, o montante é $M = C(1+t/n)^n$ (é intuitivo que fixada a taxa, quanto maior o número de aplicações maior é o montante), J. Bernoulli propos o problema da composição contínua de juros: o de determinar $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n$, tornando-se o primeiro a afirmar a existência do número hoje designado e, visto que a sequência $(1+1/n)^n$ é limitada por 3.

Porém, passaram 160 anos até que as questões da convergência de uma sequência e da definição de um número real fossem esclarecidas, em 1872, meio século após a obra clássica de Fourier, com os trabalhos do francês H. Méray (1835-1911), que percebera o "círculo vicioso"

[1] O francês B. Pascal (1623-1662) em 1654 forneceu a primeira clara explanação desta indução.

decorrente de definir o limite de uma sequência como um número real e um número real como o limite de uma sequência, e dos alemães K. Weierstrass (1815-1897), que vê a necessidade de definir um número irracional independentemente do conceito de limite e prova o Teorema de Bolzano-Weierstrass [2]: todo subconjunto infinito e limitado de $\mathbb{R}$ tem ponto de acumulação, seu aluno H. E. Heine (1821-1881), que em 1872, com o chamado desenvolvimento de Cantor-Heine, em essência adota como definição que sequências convergentes que não convergem a números racionais definem números irracionais, G. Cantor (1845-1911) e J. W. R. Dedekind (1831-1916), o qual apresentou uma construção de $\mathbb{R}$ dita "cortes de Dedekind" utilizando o axioma de Cantor-Dedekind, isto é, que os pontos sobre uma reta formam um contínuo biunívoco com $\mathbb{R}$. Tais cortes permitiram a fundamentação da análise sem apelo à intuição geométrica e foram simplificados no início do século XX pelo matemático e filósofo inglês B. Russel (1872-1970).

Estes desenvolvimentos conduziram ao **Axioma do Supremo, ou Completude,** que distingue os corpos ordenados $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, fornecendo a propriedade de continuidade de $\mathbb{R}$.

2.2 - Axioma do Supremo

Duas das mais famosas construções de $\mathbb{R}$ podem ser encontradas em [Ru] e [Sp].... Neste texto assumimos a existência de $\mathbb{R}$, apresentando o axioma da completude.

Consideremos L um corpo ordenado arbitrário.

Definição 2.1 *Seja $X \subset L$, X não vazio.*

(a) $M \in L$ é um **majorante** *para X se $x \leq M, \forall x \in X$.*

(b) $\beta \in L$ é um **supremo** *de X se β é um majorante de X e, se M é majorante de X, $\beta \leq M$.*

O supremo de X, indicado $\sup X$, se existir, é único. Se $\sup X \in X$*, ele é um* **máximo***,notado* $\max X$*. Analogamente define-se* **minorante** *e* **ínfimo***,* $\inf X$*, e* **mínimo** *de X,* $\min X$*.*

Definição 2.2 *$X \subset L$ é* **limitado superiormente** *se existe $M \in L$ tal que $x \leq M$, $\forall x \in X$. Analogamente definimos X* **limitado inferiormente***.*

Temos que o corpo ordenado $\mathbb{R}$ satisfaz à propriedade abaixo.

Axioma 2.3 (do Supremo) *Se $X \subset \mathbb{R}$, é não vazio e limitado superiormente, X tem supremo.*

Provemos que $\mathbb{Q}$ não tem propriedade análoga, mostrando que:

(1) não existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que $p^2 = 2$,

(2) $A = \{p \in \mathbb{Q} : p > 0 \text{ e } p^2 < 2\}$ não tem máximo e $B = \{p \in \mathbb{Q} : p > 0 \text{ e } p^2 > 2\}$ não tem mínimo.

[2]Bernhard Bolzano (1781-1848), padre theco nascido em Praga. A obra de Bolzano foi, no que respeita ao rigor em análise, superior a de seus contemporâneos mas, em grande parte por ele não ser de um grande centro, permaneceu desconhecida até 1870, quando foi redescoberta pelos matemáticos alemães H. A. Schwarz (1843-1921), sucessor de Weierstrass em Berlim a partir de 1892, e H. Hankel (1839-1873), aluno de Riemann.

Verificação:

(1) Suponhamos que existam $p, q \in \mathbb{Q}^*$ com $(\frac{p}{q})^2 = 2$. Podemos supor $p, q > 0$ e $\mathrm{mdc}(p, q) = 1$. Então, $p^2 = 2q^2$ e p^2 é par e, portanto, p é par. Logo, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $p = 2m$ e obtemos $(2m)^2 = 2q^2$ e, então, $q^2 = 2m^2$. Logo, q^2 é par e também q é par. O que contradiz $\mathrm{mdc}(p, q) = 1$.

(2) Se $p \in A$, seja $r \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < r < 1$ e $r(2p+1) < 2 - p^2$. Então, $q = p + r \in \mathbb{Q}$, $q > p$ e

$$q^2 = p^2 + r(2p + r) < p^2 + r(2p + 1) < p^2 + (2 - p^2) = 2 \;;$$

logo, temos $q \in A$ e $q > p$. Assim, não existe $\max A$.

Se $p \in B$ então $p^2 > 2$ e $q = p - \frac{p^2-2}{2p} = \frac{p}{2} + \frac{1}{p}$ é tal que $0 < q < p$ e

$$q^2 p^2 - (p^2 - 2) + \Big(\frac{p^2 - 2}{2p}\Big)^2 > p^2 - (p^2 - 2) = 2 \;;$$

logo, $q \in B$, com $q < p$, e então, não existe $\min B$. Fim da Verificação.

Portanto, como dado $p \in \mathbb{Q}$, $p > 0$, temos $p^2 < 2$ ou $p^2 > 2$, concluímos que não existe $\sup A \in \mathbb{Q}$.

O corpo $\mathbb{R}$ é o único corpo ordenado, a menos de um isomorfismo de corpos ordenados que preserve a ordem, com tal propriedade. Dizemos que $\mathbb{R}$ é o único corpo ordenado **completo**.

O axioma do supremo é, evidentemente, equivalente ao **Axioma do Ínfimo**: Se $X \subset \mathbb{R}$ é não vazio e limitado inferiormente então X admite um ínfimo. Ainda mais, permite deduzir[3] analiticamente propriedades geométricas dos inteiros e, incluso, a propriedade arquimediana.

Propriedade 2.4 (Aproximação) *Seja $X \subset \mathbb{R}$ tal que existe $\beta = \sup X$. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $\beta - \epsilon < x \leq \beta$*

Prova: Dado $\epsilon > 0$, como $\beta - \epsilon < \beta$ segue pela Definição 2.1(b) que $\beta - \epsilon$ não é majorante de X; caso contrário teríamos $\beta \leq \beta - \epsilon$. Logo, existe $x \in X$ tal que $\beta - \epsilon \leq x$ e então, $\beta - \epsilon < x \leq \beta$ ∎

Lema 2.5 *O conjunto $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente.*

Prova: Se $\mathbb{N}$ é limitado superiormente, pelo axioma do supremo, existe $\beta = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Então, $\beta - 1$ não é majorante de $\mathbb{N}$ e existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\beta - 1 < n$. Logo, $\beta < n + 1$, com $n + 1 \in \mathbb{N}$ ↯

Propriedade 2.6 (Arquimediana) *Sejam $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$. Então, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.*

Prova: Pelo Lema 2.5 existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{y}{x}$ ∎

A propriedade arquimediana implica a não existência de "infinitésimos" em $\mathbb{R}$.

Corolário 2.7 *Seja $x \geq 0$ tal que $x < \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$. Então, $x = 0$.*

Prova: Por contradição. Suponhamos $x \neq 0$. Então temos $0 < x < \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e assim $nx < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, o que é absurdo pois contradiz a propriedade arquimediana. Logo, $x = 0$ ∎

A Propriedade 2.6 implica, ainda, no resultado abaixo e suas consequências elementares.

[3] Nas palavras de Méray (1869) "....até o presente estas proposições eram consideradas axiomas"

Desigualdade 2.8 (Bernoulli) *Se* $\alpha > 0$, $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Prova: Se $n = 0$ é óbvio. Supondo a desigualdade válida para $n \in \mathbb{N}$ temos,

$$(1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)(1+\alpha)^n \geq (1+\alpha)(1+n\alpha) = 1 + (n+1)\alpha + n\alpha^2 \geq 1 + (n+1)\alpha \quad \blacksquare$$

Corolário 2.9 *Seja* $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. *Então,*

(a) Se $a > 1$, *para todo* $M > 0$ *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $a^n > M$.

(b) Se $0 < a < 1$, *para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $a^n < \epsilon$.

Prova:

(a) Escrevendo $a = 1 + \alpha$, $\alpha > 0$, pela desigualdade de Bernoulli temos $a^m \geq 1 + m\alpha$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 2.5 $\mathbb{N}$ não é limitado e existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{M}{\alpha}$ e portanto, $a^n \geq 1 + n\alpha > M$.

(b) Temos $\frac{1}{a} > 1$ e, pelo item (a), dado $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\frac{1}{a})^n > \frac{1}{\epsilon}$ e portanto, $a^n < \epsilon$ $\blacksquare$

Abaixo mostramos a equivalência entre o Axioma do Supremo e um dos mais relevantes enunciados sobre o qual pode-se fundamentar a teoria de números reais.

Teorema 2.10 *Em* $\mathbb{R}$, *são equivalentes:*

(a) O Axioma do Supremo.

*(a) (***Princípio dos Intervalos Encaixantes***)*[4] *Para toda sequência* $[a_0, b_0], ..., [a_n, b_n], ...,$ $n \in \mathbb{N}$, *de intervalos fechados em* $\mathbb{R}$, *satisfazendo:*

(i) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *e*

(ii) para todo $\epsilon > 0$ *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $0 \leq b_n - a_n < \epsilon$,

a intersecção $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ *é um único ponto em* $\mathbb{R}$.

Prova:

(a) $\Rightarrow (b)$ Fixado $n \in \mathbb{N}$, de $a_n \leq a_{n+p} \leq b_{n+p} \leq b_n \leq b_{n-1} \leq .... \leq b_0$, qualquer que seja $p \in \mathbb{N}$, segue que $a_n \leq b_m$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$, e todo b_n é um majorante de $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Pelo axioma do supremo existe $\alpha = \sup A \in \mathbb{R}$, e $a_n \leq \alpha \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Isto é, $\alpha \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$. Se $\beta \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ então $|\beta - \alpha| \leq b_n - a_n$, $\forall n$, e $|\beta - \alpha| < \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$, e pelo Cor. 2.7, $\beta - \alpha = 0$.

(b) $\Rightarrow (a)$[5] Seja $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ e A limitado superiormente, $M \in \mathbb{R}$ um majorante de A e $a \in A$. Se $a = M$, é óbvio que a é um supremo de A. Caso contrário, contruamos indutivamente uma sequência de intervalos $[a_n, m_n]$, $n \in \mathbb{N}$, tal que $[a_{n+1}, m_{n+1}] \subset [a_n, m_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, satisfazendo ($\forall n \in \mathbb{N}$): $a_n \in A$, m_n é majorante de A e $|m_{n+1} - a_{n+1}| \leq |m_n - a_n|$.

[4] Bolzano e Cauchy assumiam como verdadeiro tal princípio.

[5] Argumentações por bissecções, como esta, devem-se muito a Bolzano e constam em Euclides, Elementos X.

Seja $a_0 = a$ e $m_0 = M$. Supondo construído $[a_n, m_n]$ com as propriedades desejadas, consideremos $\beta_n = \frac{a_n + m_n}{2}$, o ponto médio de $[a_n, m_n]$. Se β_n é majorante de A, definindo $a_{n+1} = a_n$ e $m_{n+1} = \beta_n$, é óbvio que $[a_{n+1}, m_{n+1}]$ satisfaz as condições estipuladas. Se β_n não é majorante de A, existe $a' \in A$ com $\beta_n < a'$ e, como m_n é majorante de A, temos $a' \leq m_n$; logo, $\beta_n < a' \leq m_n$ e definimos $a_{n+1} = a'$ e $m_{n+1} = m_n$ e assim, é claro que $[a_{n+1}, m_{n+1}]$ atende as condições requeridas. Temos então $|m_n - a_n| \leq \frac{M-a}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e, pelo Corolário 2.9(b), para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|m_{n_0} - a_{n_0}| \leq \frac{M-a}{2^{n_0}} < \epsilon$. Assim, a sequência de intervalos $[a_n, m_n]$, $n \in \mathbb{N}$, cumpre as exigências (i) e (ii) no Princípio dos Intervalos Encaixantes e concluímos que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, m_n] = \{p\}$, para algum $p \in \mathbb{R}$.

Por fim, provemos $p = \sup A$. Se $a \in A$ temos $a \leq m_n = a_n + (m_n - a_n) \leq p + (m_n - a_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo, pela hipótese (a)(ii), $a \leq p + \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$, e então $a \leq p$, $\forall a \in A$, e p é majorante de A. Ainda mais, se M é majorante de A então $p = a_n + (p - a_n) \leq M + (m_n - a_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e por (a)(ii), $p \leq M + \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$; donde segue $p \leq M$ e, finalmente, p é o supremo de A ∎

2.3 - Topologia essencial

As definições topológicas que seguem possuem, todas elas, correpondentes óbvios em $\mathbb{R}$.

Notação 2.11 *Dado $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$ indicamos,*

- $D_r(a) = D(a;r)\{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$, *o* **disco aberto** *de centro a e raio r.*
- $\overline{D}_r(a) = \overline{D}(a;r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}$, *o* **disco fechado** *de centro a e raio r.*
- $D_r^*(a) = D^*(a;r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < r\}$, **o disco reduzido** *de centro a e raio r.*
- $S_r(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}$, *a* **circunferência** *de centro a e raio r.*

É claro que,

$$\overline{D}_r(a) = D_r(a) \cup S_r(a) \quad , \quad D_r(a) \cap S_r(a) = \emptyset \text{ e } D_r^*(a) = D_r(a) \setminus \{a\} .$$

Definição 2.12 *Seja $A \subset \mathbb{C}$, $A \neq \emptyset$. Diz-se que $a \in A$ é* **interior** *a A se existir $r > 0$ tal que $D_r(a) \subset A$. O* **interior de** *A é,*

$$\mathring{A} = \{a \in A : a \text{ é interior a } A\} .$$

Diz-se que A é um **conjunto aberto** *ou, simplesmente,* **aberto** *se $\mathring{A} = A$.*

Exemplos 2.13 *Os conjuntos abaixo são subconjunto de $\mathbb{C}$ e $r > 0$.*

(a) O disco aberto $D(a;r)$ é um conjunto aberto, devido à desigualdade triangular.

(b) $\mathbb{C}$ e o $\emptyset$, este por **convenção**, *são conjuntos abertos.*

(c) Se $A_1 = \{z : Rez > 0\}$, $A_2 = \{z : Rez \geq 0\}$ e $A_3 = \{z : Rez = 0\}$ então, $\mathring{A}_1 = A_1$, $\mathring{A}_2 = A_1 \neq A_2$ e $\mathring{A}_3 = \emptyset$.

(d) $\mathring{D}_r(a) = D_r(a)$, $\overline{\mathring{D}}_r(a) = \overline{D}_r(a)$ *e* $\mathring{S}_r(A) = \emptyset$.

Definição 2.14 *Seja* $X \subset \mathbb{C}$ *e* $a \in \mathbb{C}$.

- *a é* **um ponto de aderência** *de* X *se* $D(a;\epsilon) \cap X \neq \emptyset$, $\forall \epsilon > 0$.
- *O* **fecho** *de* $X \neq \emptyset$ *é* $\overline{X} = \{a : a$ *é aderente a* $X\}$. *É óbvio que* $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
- X *é um* **conjunto fechado**, *ou simplesmente* **fechado**, *se* $\overline{X} = X$.
- *a é* **um ponto de fronteira** *de* X *se todo disco aberto contém pontos de* X *e do complementar de* X, $X^c = \mathbb{C} \setminus X$. *Isto é,*

$$D(a;\epsilon) \cap X \neq \emptyset \quad e \quad D(a;\epsilon) \cap X^c \neq \emptyset \ , \forall \epsilon > 0 \ .$$

- *A* **fronteira de** X *é:* $\partial X = \{a : a$ *é um ponto de fronteira de* $X\}$. *É óbvio que* $\partial\emptyset = \emptyset$.
- *a é* **ponto de acumulação** *de* X *se* $\forall \epsilon > 0$, $D^*(a;\epsilon) \cap X \neq \emptyset$.
- *O* **derivado de** X *é :* $X' = \{a : a$ *é ponto de acumulação de* $X\}$. *É óbvio que* $\emptyset' = \emptyset$.
- *a é um* **ponto isolado de** X *se* $a \in X$ *e a não é ponto de acumulação de* X.

Proposição 2.15 *Dados* $X, F \subset \mathbb{C}$ *temos,*

(a) $X \subset \overline{X}$ *e* $\partial X \subset \overline{X}$.

(b) F *é fechado* $\Leftrightarrow$ $F \supset \partial F$.

Prova: (a) Claramente, todo ponto de X ou da fronteira de X é um ponto de aderência de X.

(b) ($\Rightarrow$) Temos, $\overline{F} = F$ e, por (a), $\partial F \subset \overline{F}$; donde, $\partial F \subset F$. ($\Leftarrow$) Por (a), resta mostrar $\overline{F} \subset F$. Suponhamos, por absurdo, $z \in \overline{F} \setminus F$. Então, z é um ponto de aderência de F não pertencente a F e portanto, é óbvio, z é um ponto de fronteira não pertencente a F $\lightning$

Exemplos 2.16 *Consideremos os conjuntos* A_i, $i = 1, 2, 3$ *do Exemplo 2.1,* $a \in \mathbb{C}$ *e* $r > 0$.

(a) É claro que $\overline{A_1} = A_2 = \overline{A_2}$, $A_3 = \overline{A_3}$, $\partial A_1 = \partial A_2$ *(eixo imaginário) , e* $\partial A_3 = A_3$.

(b) $\overline{D_r(a)} = \overline{D}_r(a)$, $\overline{S_r(a)} = S_r(a)$, $\partial D_r(a) = \partial \overline{D}_r(a) = S_r(a)$ *e* $\partial D_r^*(a) = S_r(a) \cup \{a\}$.

2.4 - Sequência, Limite de uma sequência e Propriedades Operatórias

Por $\mathbb{K}$ designamos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. A **reta estendida** é $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \bigcup \{-\infty\} \bigcup \{+\infty\}$.

Definição 2.17 *Uma* **sequência** *em um conjunto* X *qualquer,* $X \neq \emptyset$, *é uma função* $x : \mathbb{N} \to X$. *Indicamo-la por* $x = (x_n)$ *ou* $x = (x_n)_{\mathbb{N}}$, *onde* $x_n = x(n), \forall n \in \mathbb{N}$, *é o* **termo geral** *da sequência.*

Definição 2.18 *(D'Alembert 1765, Cauchy 1821) A sequência* $x = (x_n)$ *em* $\mathbb{K}$, *é* **convergente** *se existir* $x \in \mathbb{K}$ *tal que* $\forall \epsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *satisfazendo* $|x_n - x| < \epsilon$, $\forall n \geq n_0$ *(v. figura 2.1)*

Notação[6] Escrevemos $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ ou $\lim x_n = x$ ou, ainda, $x_n \to x$, se $n \to +\infty$.

Proposição 2.19 (Unicidade) *Se $(x_n) \subset \mathbb{K}$ é tal que $\lim x_n = x$ e $\lim x_n = y$ então $x = y$.*

Prova Dado $\epsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ se $n \geq n_1$ e, $|x_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$ se $n \geq n_2$. Logo, se $n \geq N = max(n_1, n_2)$, $|x - y| \leq |x - x_n| + |x_n - y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$. Donde, $x = y$ ■

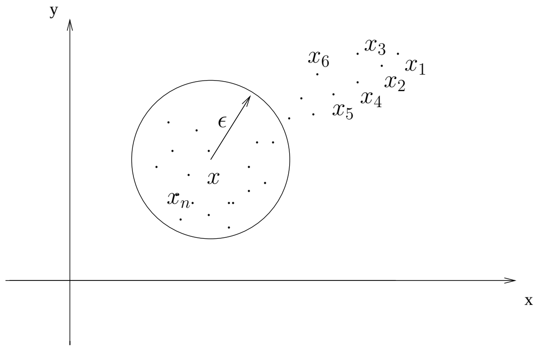


Figura 2.1: Se $\lim x_n = x$, para todo $\epsilon > 0$ é finito $\{n : x_n \notin D(x;\epsilon)\}$.

Definição 2.20 *Uma sequência é* **divergente** *se não é convergente.*

A sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}$ **diverge (tende) a** $+\infty$ se $\forall M \in \mathbb{N}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > M$, $\forall n \geq n_0$. Denotamos, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Analogamente definimos e notamos a **divergência a** $-\infty$.

Dizemos que **existe** $\lim x_n$ só se a sequência (x_n) é convergente (com limite em $\mathbb{K}$). Sequências reais divergentes a $\pm\infty$ não são convergentes (por vezes, dizemos que existe o limite em $\overline{\mathbb{R}}$). Escrevemos $\nexists \lim x_n$ se (x_n) não é convergente. Com abuso de notação, se $(x_n) \subset \mathbb{R}$, também escrevemos $\nexists \lim x_n$ para indicar que (x_n) não é convergente e, ainda, $\lim x_n \neq \pm\infty$.

Exemplo 2.21 *Seja $a \in \mathbb{R}$. Então,*

$$\lim a^n = \begin{cases} \nexists\,, & se\ a \leq -1\,, \\ 0\,, & se\ |a| < 1\,, \\ 1\,, & se\ a = 1 \\ +\infty\,, & se\ a > 1\ . \end{cases}$$

Verificação: Se $a \leq -1$ então $|a|^n \geq 1$ e $a^n = (-1)^n|a|^n \leq -1$ se n é ímpar e $a^n \geq 1$, se n é par e, é claro a partir da Definição 2.18, $\nexists \lim a_n$.

Se $|a| < 1$, dado $\epsilon > 0$ pelo Corolário 2.9(b) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a|^{n_0} < \epsilon$ e então, se $n \geq n_0$ temos $|a^n - 0| = |a|^n \leq |a|^{n_0} < \epsilon$ e portanto, pela Definição 4.18, $\lim a^n = 0$.

Se $a > 1$, dado $M > 0$ pelo corolário 2.9(a) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a^{n_0} > M$ e então, se $n \geq n_0$ temos $a^n \geq a^{n_0} > M$ e, portanto, pela Definição 2.20, $\lim a^n = +\infty$ ■

Dadas (x_n), (y_n) em $\mathbb{K}$ temos a **soma**, $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$, a **multiplicação por escalar** $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda(x_n) = (\lambda x_n)$, o **produto**, $(x_n)(y_n) = (x_n y_n)$, e a **divisão**, se $y_n \neq 0$, $\forall n$, $(\frac{x_n}{y_n})$.

[6] A notação "lim" para indicar um "limite" foi introduzida por Cauchy, em **Cours d'Analyse** (1821). Porém, Bolzano (1817) e Weierstrass (1874), que usava a notação com $\epsilon' s$ e $\delta' s$, trouxeram a noção de limite à perfeição.

Proposição 2.22 *Sejam* $(x_n)_{\mathbb{N}}$ *e* $(y_n)_{\mathbb{N}}$ *convergentes em* $\mathbb{K}$, $\lim x_n = x$ *e* $\lim y_n = y$. *Então,*

(a) $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$.

(b) $\lim \lambda x_n = \lambda \lim x_n$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

(c) $\lim(x_n y_n) = (\lim x_n)(\lim y_n)$.

(d) Se $y_n \neq 0\,, \forall n \in \mathbb{N}$, *e* $y \neq 0$ *então* $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}$.

Prova

(a) Dado $\epsilon > 0$, existem n_1 e n_2 tais que se $n > n_1$ então $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ e, se $n > n_2$, $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$. Logo, se $n > n_0 = \max(n_1, n_2)$ então $|(x_n + y_n) - (x + y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

(b) Dado $\epsilon > 0$ $\exists n_0$ tal que se $n > n_0$ $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{|\lambda|+1}$. Logo, $|\lambda x_n - \lambda x| = |\lambda|\,|x_n - x| \leq |\lambda|\,\frac{\epsilon}{|\lambda|+1} \leq \epsilon$.

(c) Obviamente, $|y_n - y| < 1$ se n é suficientemente grande e (y_n) é limitada. Seja $M > 0$ tal que $|y_n| \leq M\,, \forall n$ e, ainda, $M > |x|$. Dado então $\epsilon > 0$ existem n_1 e n_2 tais que se $n > n_1$ então $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2M}$ e, se $n > n_2$, $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2M}$. Logo, se $n > n_0 = \max(n_1, n_2)$ temos $|x_n y_n - xy| = |(x_n - x)y_n + x(y_n - y)| \leq |x_n - x|\,|y_n| + |x|\,|y_n - y| < \frac{\epsilon M}{2M} + \frac{\epsilon M}{2M} = \epsilon$.

(d) Escrevendo $\frac{x_n}{y_n} = x_n \frac{1}{y_n}$ vemos que pelo ítem (c) basta mostrarmos que $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y}$. Como $y_n \to y \neq 0$ se $n \to +\infty$ e, pela desigualdade triangular, $\big||y_n| - |y|\big| \leq |y_n - y|$ segue que $|y_n| \to |y|$ se $n \to +\infty$ e existe n_1 tal que $|y_n| > \frac{|y|}{2}$. Então, dado $\epsilon > 0$ e n_2 tal que $|y_n - y| < \frac{\epsilon|y|^2}{2}$ se $n > n_2$, escolhendo $n_0 = \max(n_1\,, n_2)$ concluímos que, para $n > n_0$, $\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y - y_n}{y_n y}\right| = \frac{|y_n - y|}{|y_n|\,|y|} < \frac{\epsilon|y|^2}{2}\,\frac{2}{|y|^2} = \epsilon$ ■

Exemplo 2.23 *Se* $z \in \mathbb{C}$ *então,*

$$\begin{cases} \lim z^n = 0\,, & \textit{se } |z| < 1\,, \\ \lim z^n = 1\,, & \textit{se } z = 1\,, \\ \lim |z^n| = +\infty\,, & \textit{se } |z| > 1\,, \\ \textit{a sequência } (z^n) \textit{ diverge se } |z| \geq 1\,, \ \textit{com } z \neq 1\,. \end{cases}$$

Verificação:

Se $|z| < 1$, pelo Ex. 2.21 temos $\lim |z|^n = 0$ e, como $|z^n - 0| = |z|^n$, segue que $\lim z^n = 0$.

Se $|z| > 1$ temos $|z^n| = |z|^n$ e, pelo Exemplo 2.21, temos $+\infty = \lim |z|^n = \lim |z^n|$.

Se $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ é tal que existe $\lim z^n = \zeta \in \mathbb{C}$, multiplicando a sequência por z obtemos, pela Proposição 2.22(b), $\lim z^{n+1} = z\zeta$ e, é claro, $\lim z^{n+1} = \lim z^n = \zeta$. Assim, $z\zeta = \zeta$ e $\zeta(z-1) = 0$; donde $\zeta = 0$. Como para $|z| \geq 1$ temos $|z^n| = |z|^n \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, a sequência (z^n) certamente não converge a zero e, por fim, concluímos que ela diverge ■

Proposição 2.24 *Sejam* (x_n),(y_n) *e* (z_n) *sequências convergentes em* $\mathbb{R}$. *São válidas:*

*(a) (***Conservação do sinal***) Se* $\lim x_n = L > 0$, *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > n_0$ *implica* $x_n > 0$.

(b) Se $x_n \geq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *então* $\lim x_n \geq a$.

(c) Se $x_n \geq y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $\lim x_n \geq \lim y_n$.

*(d) (**Confronto**) Se $x_n \leq y_n \leq z_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $\lim x_n = \lim z_n = L$ então $\lim y_n = y$.*

Prova:

(a) Dado $\epsilon = \frac{L}{2}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ temos $|x_n - L| < \frac{L}{2}$. Logo, $n \geq n_0$ implica $x_n \in (\frac{L}{2}, \frac{3L}{2})$ e então, $x_n > \frac{L}{2} > 0$.

(b) Se $\lim x_n = L < a$, dado $\epsilon = \frac{a-L}{2}$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica $x_n \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$; logo, se $n \geq n_0$, $x_n < L + \frac{a-L}{2} = \frac{L+a}{2} < \frac{a+a}{2} = a$ $\lightning$

(c) Como $x_n - y_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, a afrimação segue do item (c).

(d) Por (c) temos $L = \lim x_n \leq \lim y_n \leq \lim z_n = L$ ■

Proposição 2.25 *Seja $X \subset \mathbb{K}$, $f : X \to \mathbb{K}$ tal que $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$ e $(x_n) \subset \mathbb{K}$ tal que $\lim x_n = p \in \mathbb{K}$. Então, $\lim f(x_n) = L$. Em particular, se f é contínua[7], $\lim f(x_n) = f(p)$.*

Prova Dado $\epsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que $0 < |x - p| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \epsilon$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - p| < \delta$ se $n \geq n_0$ e assim, $|f(x_n) - L| < \epsilon$ ■

Definição 2.26 *A sequência (x_n) é dita* **crescente** *(***decrescente***) se $x_{n+1} \geq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ($x_{n+1} \leq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$) e em qualquer desses dois casos dizemos que a sequência é* **monótona**.

Abaixo temos as formas (fracas) equivalentes do axioma do supremo que são muito úteis.

Teorema 2.27 *São equivalentes:*

(a) Se $X \subset \mathbb{R}$, é não vazio e limitado superiormente, X tem supremo (Axioma do supremo).

(b) Toda sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}$, crescente e limitada superiormente, é convergente.

(c) Toda sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}$, decrescente e limitada inferiormente é convergente.

Prova: Temos, (a) $\Rightarrow$ (b) é trivial e, $(b) \Leftrightarrow (c)$ é óbvio.

(b) $\Rightarrow$ (a): Sejam $x \in X$ e M um majorante. Definamos duas sequências em $\mathbb{R}$, $(x_n) \subset X$, crescente, e (y_n) de majorantes e decrescente, tais que $(*)$ $\quad |y_n - x_n| \leq \frac{|y_{n-1} - x_{n-1}|}{2^{n-1}}, n \geq 1$.

Passo 1: sejam $x_1 = x$ e $y_1 = M$, a afirmação é válida para $n = 1$. Passo 2: suponhamos escolhidos $x_1, ..., x_n$ e $y_1, ..., y_n$ segundo $(*)$. Seja $\beta = \frac{x_n + y_n}{2}$. Se β não majora X, existe $x' \in X$, $\beta < x'$, pomos $x_{n+1} = x'$ e $y_{n+1} = y_n$. Se majora, pomos $x_{n+1} = x_n$ e $y_{n+1} = \beta$.

O par $(x_n), (y_n)$ satisfaz (*) e pela forma fraca do axioma do supremo ambas convergem. Seja $\alpha = \lim x_n$ e $\beta = \lim y_n$. Como $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{M - x_1}{2^{n-1}} = 0$ então $\alpha = \beta$. Não existe, é claro, $x \in X$, $x > \beta = \lim y_n$, e assim β é majorante e não há majorante de X menor que $\beta = \lim x_n$ ■

[7]Bolzano, em 1817, é o primeiro a fornecer a definição moderna de função contínua.

2.5 - Subsequências e Valor de Aderência

Definição 2.28 *Dada* $a = (a_n) \subset \mathbb{K}$ *e* $I = \{n_1 < n_2 < n_3 < ..... < n_k < n_{k+1} ...\} \subset \mathbb{N}$ *um conjunto infinito de índices, a sequência* (b_k), $b_k = a_{n_k}$, *é uma* **subsequência** *de* (a_n), *indexada em* I.

Proposição 2.29 *Se* (a_n) *converge a* L *e* (a_{n_k}) *é uma sua subsequência,* (a_{n_k}) *converge a* L.

Prova: Dado $\epsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ com $|a_n - L| < \epsilon$, se $n \geq N$, e $\exists\, k_0$ tal que $n_{k_0} > N$. Para $k > k_0$, temos $n_k > n_{k_0}$ e $|a_{n_k} - L| < \epsilon$ ∎

Lema 2.30 *Dada a sequência* $(a_n) \subset \mathbb{K}$, $L \in \mathbb{K}$ *é limite de uma sua subsequência, se, e só se,* $\forall\, \epsilon > 0$, *o conjunto de índices* $\{n \in \mathbb{N} : a_n \in D(L; \epsilon)\}$ *é infinito. Isto é, se quaisquer que sejam* $\epsilon > 0$ *e* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existe* $n > n_0$ *tal que* $|a_n - L| < \epsilon$.

Prova A "ida" é óbvia. Para a "volta", seja n_1 no conjunto infinito $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in D(L; 1)\}$. Escolhidos $n_1 < n_2 < ... < n_k$, em $\mathbb{N}$, com $x_{n_j} \in D(L; \frac{1}{j})$, $1 \leq j \leq k$, seja n_{k+1} no conjunto infinito $\big\{n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{1, 2, ..., n_k\} : x_n \in D(L; \frac{1}{k+1})\big\}$. Temos, $n_{k+1} > n_k$ e $x_{n_{k+1}} \in D(L; \frac{1}{k+1})$. Assim, temos definida indutivamente uma subsequência (x_{n_k}) tal que $|x_{n_p} - L| \leq \frac{1}{p} \leq \frac{1}{k}$, $\forall p \geq k$, e que, portanto converge a L ∎

Definição 2.31 L, *como acima, é um* **valor de aderência** *da sequência* (x_n).

Se $(x_n) \subset \mathbb{R}$ é limitada superiormente (inferior/e), o conjunto dos seus valores de aderência idem. Se $\{x_n\} \subset [\,\alpha\,, \beta\,]$, então $\{x : x$ é valor de aderência de $(x_n)\} \subset [\,\alpha\,, \beta\,]$.

Alerta: O conceito de valor de aderência de uma sequência (x_n) é distinto dos de ponto de aderência ou acumulação do conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$: (1) se (x_n) é estritamente crescente (ou decrescente) então $\{x : x$ é valor de aderência de $(x_n)\} = \varnothing \neq \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$; (2) se (x_n) é constante e igual a $a \in \mathbb{R}$, $\{x : x$ é valor de aderência de $(x_n)\} = \{a\} \neq \{x_n : n \in \mathbb{N}\}' = \varnothing$.

Teorema 2.32 *Toda sequência* $(x_n) \subset \mathbb{R}$ *admite uma subsequência ou crescente ou decrescente.*

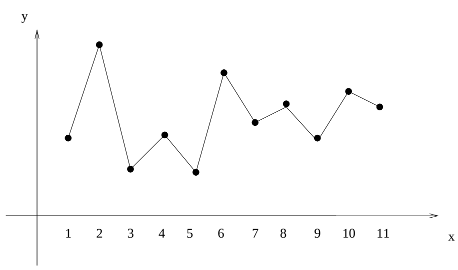


Figura 2.2: Função poligonal conectando os pontos (n, x_n)

Prova: Vide figura 2.2. Seja $M = \{n \in \mathbb{N} : x_n > x_m\,, \forall m > n\}$. Caso M é infinito, $M = \{n_1 < n_2 < ...\}$, então (x_{n_k}) é decrescente. Se M é finito, seja $n_1 \in \mathbb{N}$ maior que todo elemento de M. Então $n_1 \notin M$ e existe $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_1} \leq x_{n_2}$ e, analogamente, existe $n_3 > n_2$ tal que $x_{n_2} \leq x_{n_3}$. Procedendo por recursão definimos uma subsequência (x_{n_k}) crescente ∎

Corolário 2.33 *Toda sequência em $\mathbb{K}$, limitada, admite subsequência convergente.*

Prova: O caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ segue de 2.32 e 2.27(b) e (c). Em $\mathbb{C}$, sequências (z_n) limitadas geram duas em $\mathbb{R}$, $(Re\, z_n)$ e $(Im\, z_n)$, limitadas. Para $(Re\, z_{n_k})$ convergente, $(Im(z_{n_k}))$ tem subsequência convergente indexada em $I \subset \mathbb{N}$. Então, $(Re(z_n))_{n\in I}$, $Im(z_n)_{n\in I}$ e $(z_n)_{n\in I}$ convergem ∎

Corolário 2.34 *Se $(x_n) \subset \mathbb{K}$ é limitada, (x_n) converge a $p \in \mathbb{K}$ se, e só se, toda subsequência convergente de (x_n) converge a p.*

Prova: $(\Rightarrow)$ Segue da Proposição 2.29.

$(\Leftarrow)$ Afirmação: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = p$. Caso contrário, existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall m \in \mathbb{N}, \exists\, n > m$, com $|x_n - p| > \epsilon$. Por indução, é trivial, existe uma subsequência (x_{n_k}), $|x_{n_k} - p| > \epsilon$, que não têm, é óbvio, subsequência convergente a p; porém, por ser limitada, têm subsequência convergente, que é subsequência de (x_n), e então o limite é p ↯

Corolário 2.35 (Teorema de Bolzano-Weierstrass)(1874) *Todo subconjunto infinito e limitado de $\mathbb{K}$ tem ponto de acumulação.*

Prova: Seja X tal subconjunto e $(x_n) \subset X$ uma sequência de pontos distintos. Pelo Corolário 2.33, existe (x_{n_k}) convergente a um ponto $x \in \mathbb{K}$. É claro que x é ponto de acumulação de X ∎

2.6 - Sequências de Cauchy

Definição 2.36 *A sequência $(x_n) \subset \mathbb{K}$ é uma* **sequência de Cauchy** *(ou* **sequência fundamental)** *se $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \epsilon, \forall\ n, m \geq N$.*

Proposição 2.37 *Toda sequência $(x_n) \subset \mathbb{K}$ convergente é de Cauchy.*

Prova: Seja $p = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Dado $\epsilon > 0$, arbitrário, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - p| < \frac{\epsilon}{2}, \forall n \geq N$. Logo, para $n, m \geq N$ temos $|x_n - x_m| \leq |x_n - p| + |p - x_m| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ ∎

O principal resultado nesta seção é que em $\mathbb{K}$ toda sequência de Cauchy é convergente. Tal teorema não é válido no corpo $\mathbb{Q}$ e, em $\mathbb{R}$, é equivalente ao Axioma do Supremo[8].

Teorema 2.38 *Toda sequência de Cauchy, $(x_n) \subset \mathbb{C}$, é convergente*[9].

Prova Mostremos que (x_n) é limitada. Seja N tal que $|x_n - x_m| < 1$ se $n, m \geq N$. Logo, se $n \geq N$, $|x_n - x_N| < 1$ e $x_n \in \overline{D}(x_N; 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z - x_N| \leq 1\}$. Fora do disco há finitos pontos de (x_n), contidos em um disco $\overline{D}(0; R')$, $R' > 0$, seja $R = max(R', |x_N| + 1)$. É óbvio que $(x_n) \subset \overline{D}(0; R)$.

Pelo Corolário 2.33, existe (x_{n_k}) subsequência convergente a p. Mostremos $\lim x_n = p$. Dado $\epsilon > 0$, existe N tal que $|x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2}$, se $n, m \geq N$ e, $k_0 \in \mathbb{N}$ com $|x_{n_k} - p| < \frac{\epsilon}{2}$, se $k \geq k_0$. Existe também, e escolhemos, $n_{k'}$ tal que $k' \geq k_0$ e $n_{k'} \geq N$. Assim, para $n \geq N$, obtemos a desigualdade $|x_n - p| \leq |x_n - x_{n_{k'}}| + |x_{n_{k'}} - p| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$ ∎

[8]Bolzano (1817) define sequências fundamentais antes que Cauchy e supondo estabelecido que estas, em $\mathbb{R}$, são convergentes, "prova" (sem notar a circularidade) com uma argumentação perfeita (exceto pelo círculo vicioso) o teorema que atualmente conhecemos como Axioma do Supremo.

[9]Cauchy, em **Cours d'Analyse** (1821), define sequência fundamental e "prova" que uma sequência é fundamental se e só se é convergente. Obviamente (hoje), a prova tem um lapso na parte "só se" (a "volta").

2.7 - O $lim\,sup$ e o $lim\,inf$.

O conjunto dos valores de aderência de uma sequência limitada em $\mathbb{R}$ é, obviamente, limitado e, pelo Corolário 2.33, não vazio. Portanto, a definição abaixo é bem posta.

Definição 2.39 [10] *Dada* $(x_n) \subset \mathbb{R}$ *limitada,* $\liminf\ x_n = \inf\{x : x$ *é valor de aderência de* $(x_n)\}$ *e* $\limsup\ x_n = \sup\{x : x$ *é valor de aderência de* $(x_n)\}$.

Se (x_n) é ilimitada superiormente pomos = $\limsup\ x_n = +\infty$ e, se inferiormente, $\liminf\ x_n = -\infty$. Para $(x_n) \subset \mathbb{R}$, $\liminf x_n$ é o **limite inferior de** (x_n) e $\limsup x_n$ é o **limite superior**. Utilizamos também as notações: $\underline{\lim}\, x_n = \liminf x_n$ e $\overline{\lim}\, x_n = \limsup x_n$.

Teorema 2.40 *Dada* $(x_n) \subset \mathbb{R}$ *limitada,* $\liminf\ x_n$ *e* $\limsup\ x_n$ *são, respectivamente, o menor e o maior valor de aderência de* (x_n).

Prova: Basta mostrarmos que ambos são valores de aderência.

Para $m = \liminf\ x_n$ e $\epsilon > 0$, por definição de ínfimo existe m', um valor de aderência, tal que $m' \in [\,m\,, m + \frac{\epsilon}{2})$. Pelo Lema 2.30, existe uma subsequência $(x_{n_k}) \subset (m' - \frac{\epsilon}{2}, m' + \frac{\epsilon}{2})$. Logo, $(x_{n_k}) \subset (m - \epsilon, m + \epsilon)$ e, novamente pelo Lema 2.30, m é valor de aderência.

Para $\limsup\ x_n$ aplicamos o mostrado no páragrafo acima à sequência $(-x_n)$ ∎

Observação 2.41 *Qualquer que seja a sequência* $(x_n) \subset \mathbb{R}$*, limitada ou não, convergente ou não, existem* $\liminf x_n$ *e* $\limsup x_n$*, em* $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

Exemplos 2.42 *Consideremos as sequências* (x_n) *em* $\mathbb{R}$ *abaixo.*

(1) Se $x_n = (-1)^n$, 1 *e* -1 *são (únicos) valores aderentes,* $\limsup(-1)^n = 1$ *e* $\liminf(-1)^n = -1$.

(2) Se (x_n) *enumera* $\mathbb{Q}$*, todo* $x \in \mathbb{R}$ *é valor aderente,* $\liminf x_n = -\infty$ *e* $\limsup x_n = +\infty$.

Corolário 2.43 *Suponha* $(x_n) \subset \mathbb{R}$ *e limitada. Dado* $\epsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n \geq n_0$ *então* $\liminf x_n\ - \epsilon \leq x_n \leq\ \limsup x_n + \epsilon$.

Prova: Por contradição. Dado $\epsilon > 0$, se para todo $m \in \mathbb{N}$ existir $n > m$ tal que $x_n > \limsup x_n + \epsilon$, determinamos uma subsequência limitada de (x_n) em $J = [\limsup x_n\ + \epsilon, +\infty)$ que, pelo Cor. 2.33, admite subsequência convergente em J que, por sua vez, também é subsequência de (x_n). Absurdo! Pois, $\limsup x_n$ é o valor máximo de aderência. A prova é análoga para $\liminf x_n$ ∎

Corolário 2.44 *Dada* (x_n) *em* $\mathbb{R}$ *e limitada,* (x_n) *converge se, e só se,* $\liminf\ x_n =$ *limsup* x_n.

Prova Segue do Corolário 2.34 e Teorema 2.40 ∎

Para uma sequência $(x_n) \subset [m, M] \subset \mathbb{R}$, com $m \leq M$, podemos, além da caracterização um tanto geométrica dada pelo Teorema 2.40, expressar analiticamente o $\liminf x_n$ e o $\limsup x_n$. Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $X_n = \{x_n,\, x_{n+1}, ...\}$. É óbvio que $X_1 \supset X_2 \supset ... \supset X_n \supset ...$ e, portanto,

$$\begin{aligned} m\ &\leq \inf X_1\ \leq\ \inf X_2 \leq .... \leq\ \inf X_n\ \leq\ \inf X_{n+1}\ \leq .... \leq M \\ M\ &\geq \sup X_1\ \geq\ \sup X_2 \geq .... \geq\ \sup X_n\ \geq\ \sup X_{n+1}\ \geq .... \geq m\ . \end{aligned}$$

[10] Cauchy, em **Cours d'Analyse**(1821), apresenta de forma vaga o conceito de $\limsup$ no Teste da Raíz.

Logo, as sequências $\big(\inf X_n\big)$ e $\big(\sup X_n\big)$ são limitadas e, respectivamente, crescente e decrescente e, pelo Teorema 2.27, convergentes. Mantendo a notação temos o resultado que segue.

Teorema 2.45 *Se* $(x_n) \subset \mathbb{R}$ *é limitada então* $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf X_n = \liminf x_n$ *e* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup X_n = \limsup x_n$.

Prova: Sejam $a_n = \inf X_n$, $b_n = \sup X_n$, $n \in \mathbb{N}$, $a = \lim a_n$ e $b = \lim b_n$.

Mostremos que todo valor de aderência de (x_n) pertence a $[a,b]$. Seja $x = \lim x_{n_k}$, (x_{n_k}) subsequência de (x_n). Temos $a_{n_k} \leq x_{n_k} \leq b_{n_k}$ e consequentemente, pela Proposição 2.23, $a = \lim a_n = \lim a_{n_k} \leq x = \lim x_{n_k} \leq \lim b_{n_k} = \lim b_n = b$, o que conclui esta afirmação. Pela Definição 2.39, resta apenas mostrar que a e b são valores de aderência.

Iniciemos com a sequência crescente $(a_n) = (\inf X_n)$. Dado $\epsilon > 0$, e $n_0 \in \mathbb{N}$, como $a_n \nearrow a$, existe p tal que: $m \geq p$ implica $a - \epsilon < a_m = \inf X_m \leq a$. Logo, fixando $m > \max(n_0, p)$ temos $a - \epsilon < \inf X_m = \inf\{x_i : i \geq m\} < a + \epsilon$ e, por definição de ínfimo, existe $n \geq m$ tal que $\inf X_m \leq x_n < a + \epsilon$ e, para tal $n > n_0$, $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$. Pelo Lema 2.30, a é um valor de aderência de (x_n).

Finalmente, trocando (x_n) por $(-x_n)$, $-b$ é valor de aderência de $(-x_n)$ e b de (x_n) ∎

Com as notações[11] $\inf\limits_{m\geq n} x_m$ para $\inf X_n$ e $\sup\limits_{m\geq n} x_m$ para $\sup X_n$ escrevemos também,

$$\liminf x_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{m\geq n} x_m \qquad \text{e} \qquad \limsup x_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{m\geq n} x_m.$$

2.8 - Alguns Exemplos Clássicos

Exemplos 2.46 *Deixamos ao leitor verificar ou completar as provas das afirmações abaixo.*

(1) **Aplicações do axioma do Supremo:**

(a) Se $a > 1$, a sequência $(\sqrt[n]{a}) = (a, \sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, ...,)$ é decrescente e $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Verificação:

Dados $a > 0$ e $b > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ é claro que $a > b \Leftrightarrow a^n > b^n$ e, portanto, $a > b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$. Logo, como $a > 1$, temos $1 < a^n < a^n a = a^{n+1}$ e tomando a raíz $n(n+1)$ temos $1 < a^{\frac{1}{n+1}} = (a^n)^{\frac{1}{n(n+1)}} < (a^{n+1})^{\frac{1}{n(n+1)}} = a^{\frac{1}{n}}$.

Pelo Teor. 2.27 (b), $\exists L = \lim \sqrt[n]{a}$, $L \geq 1$, e então, para a subsequência $(\sqrt[2n]{a})$, temos, pelo Corol. 2.34, $L = \lim \sqrt[2n]{a} = \lim \sqrt{\sqrt[n]{a}}$ e, pela continuidade da função raíz quadrada e Prop. 2.25, $\lim \sqrt{\sqrt[n]{a}} = \sqrt{L}$. Logo, $L = \sqrt{L}$, com $L \geq 1$, e portanto $L = 1$.

(b) Se $0 < a < 1$, $(\sqrt[n]{a}) = (a, \sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, ...,)$ é crescente e $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Verificação:

É claro que $a^{n+1} < a^n$ e, como no ultimo item, $a^{\frac{1}{n}} = (a^{n+1})^{\frac{1}{n(n+1)}} < (a^n)^{\frac{1}{n(n+1)}} = a^{\frac{1}{n+1}}$.

Pelo Teorema 2.27 (b), $\exists L = \lim \sqrt[n]{a}$, $L > 0$ e então, argumentando como em 3(a), $L = \lim \sqrt[2n]{a} = \lim \sqrt{\sqrt[n]{a}} = \sqrt{L}$. Logo, $L = \sqrt{L}$, com $L > 0$, e portanto $L = 0$.

[11] Gauss, com tais notações, definiu corretamente os limites inferior e superior de uma sequência e assim provando o Teorema 2.38 acima, em um fragmento de 1800 só publicado no início do século XX.

(c) A sequência $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, não é limitada superiormente.

Verificação: Escrevendo,

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + ... + (\frac{1}{2^{n-1}+1} + ...\frac{1}{2^n})$$

temos $\frac{1}{2^{n-1}+1} + ...\frac{1}{2^n} = \frac{2^n-(2^{n-1}+1)+1}{2^n} = \frac{2^n-2^{n-1}}{2^n} = \frac{2^{n-1}}{2^n}$ e portanto,

$$s_{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + ... + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + n\frac{1}{2} \ .$$

Logo, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_{2^n} = +\infty$ e se $m > 2^n$, $m, n \in \mathbb{N}$, temos $s_m > s_{2^n}$ e assim, $\lim\limits_{m\to+\infty} s_m = +\infty$.

(d) A sequência (a_n), $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}$ é crescente e $a_n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo, (a_n) é convergente.

Verificação:

É claro que $n! = 1.2.3.....(n-1)n \geq 2^{n-1}$, $\forall n \geq 1$. Logo, $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ e,

$$1 + \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}\right) \leq 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \leq 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 3 \ .$$

(e) A sequência (b_n), $b_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ é crescente, limitada por 3, convergente e

$$(1 + \frac{1}{n})^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...\frac{1}{n!}\ , \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Verificação: Pelo binômio de Newton temos,

$$b_n = (1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} 1^{n-p} (\frac{1}{n})^p = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} \frac{1}{n^p} \ .$$

Destaquemos nos coeficientes binomiais o fatorial de p, para $p \geq 1$,

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1).....2.1}{(n-p)!}\frac{1}{p!} = [n.....(n-p+1)]\frac{1}{p!}.$$

Reintroduzindo n^p no denominador obtemos,

$$\binom{n}{p}\frac{1}{n^p} = \frac{n.....(n-p+1)}{n^p}\frac{1}{p!} = (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})....(1-\frac{p-1}{n})\frac{1}{p!}.$$

Exemplificando, para $n \geq 4$, como $\binom{n}{0}\frac{1}{n^0} = \binom{n}{1}\frac{1}{n^1} = 1$,

$$(*) \ \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}\frac{1}{n^p} = 1 + 1 + (1-\tfrac{1}{n})\tfrac{1}{2!} + (1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})\tfrac{1}{3!} + (1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})(1-\tfrac{3}{n})\tfrac{1}{4!} + ... \ .$$

Cada uma das $n+1$ parcelas $\binom{n}{p}\frac{1}{n^p}$ da expansão de $(1+\frac{1}{n})^n$ é um múltiplo positivo de $\frac{1}{p!}$. Se n cresce, o número de parcelas e o coeficiente de $\frac{1}{p!}$ crescem e assim (b_n) é crescente. De (*) obtemos $b_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...\frac{1}{n!}$ e, pelo Exemplo 2.46 1(d), $b_n < 3$, $\forall n$. Logo, pelo Corolário 2.34, (b_n) é convergente.

Veremos no Teorema 2.58 que o limite da sequência (b_n) é o **número de Euler** e.

(f) A sequência $(\sqrt[n]{n}) = (1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, ...)$ converge a 1.

Verificação:

Mostremos que a sequência é, a partir do terceiro termo, decrescente e limitada inferiormente por 1. De fato, é óbvio que $\sqrt[n]{n} \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e é claro que

$$(n+1)^{\frac{1}{n+1}} < n^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow (n+1)^n < n^{n+1} \Leftrightarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} < n \Leftrightarrow (1+\frac{1}{n})^n < n \ ,$$

e então, como pelo exemplo 3(e) acima $(1+\frac{1}{n})^n < 3$, temos $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$, se $n \geq 3$ e, pelo Teor. 2.27 $\exists L = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$, $L \geq 1$. Argumentando como nos Exemplos 2.46 1(a) e 1(b), e usando $\lim \sqrt[n]{2} = 1$ $\big($Exemplo 2.46 1(a)$\big)$ e a Proposição 2.22 (c) (para o limite do produto de duas sequências convergentes), temos $L = \lim \sqrt[2n]{2n} = \lim \sqrt{\sqrt[n]{2n}} = \lim \sqrt{\sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n}} = \sqrt{1.L} = \sqrt{L}$. Logo, $L = \sqrt{L}$, com $L \geq 1$; donde $L = 1$.

(2) (a) Se $a > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^p} = +\infty$, $\forall p \in \mathbb{N}$.

Verificação:

Escrevendo $n = 1+\alpha, \alpha > 0$, se $n > p$ temos, pelo binômio de Newton,

$$\frac{(1+\alpha)^n}{n^p} = \frac{1}{n^p}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\alpha^m \geq \binom{n}{p+1}\frac{\alpha^{p+1}}{n^p} = n\frac{(n-1)(n-2)...(n-p)}{n^p}\alpha^{p+1},$$

e é claro que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\frac{(n-1)(n-2)...(n-p)}{n^p}\alpha^{p+1} = +\infty$.

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{z^n}{n!} = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Verificação: Seja $z \neq 0$.

Para $n_0 \in \mathbb{N}$, $\frac{n_0}{|z|} > 2$, e $n > n_0$ temos,

$$\frac{n!}{|z|^n} = \frac{n_0\,!}{|z|^{n_0}}\frac{n_0+1}{|z|}....\frac{n}{|z|} > \frac{n_0\,!}{|z|^{n_0}}2^{n-n_0} \ ;$$

donde, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{|z|^n} \geq \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n_0\,!}{|z|^{n_0}} 2^{n-n_0} = +\infty$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|z|^n}{n!} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{z^n}{n!} = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

(3) (**Soma de Cesaro**[12]) (Cauchy, 1821) Seja $(z_n) \subset \mathbb{C}$. Se $\lim z_n = z$ então,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{z_1 + ... + z_n}{n} = z \ .$$

Verificação:

Dado $\epsilon > 0$ seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica $|z_n - z| < \epsilon$. Então, se $n > N$,

$$\frac{z_1 + ... + z_N + z_{N+1} + ...z_n}{n} - z = \frac{(z_1 - z) + ... + (z_N - z)}{n} + \frac{(z_{N+1} - z) + ...(z_n - z)}{n}.$$

Evidentemente, podemos escolher $n_0 > N$ tal que se $n > n_0$ a primeira parcela do 2º membro da equação acima é menor que ϵ. Então, para $n > n_0 > N$, aplicando a desigualdade triangular na segunda parcela do 2º membro da mesma equação obtemos

$$\Big|\frac{(z_{N+1} - z) + ...(z_n - z)}{n}\Big| \leq \frac{|z_{N+1} - z| + ... + |z_n - z|}{n} \leq \frac{(n-N)\epsilon}{n} < \epsilon \ .$$

[12] E. Cesaro (1859-1906), matemático italiano.

2.9 - As Funções Logaritmo e Exponencial Reais

Definição 2.47 **A função logaritmo real**, *$\log : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, é dada por* $\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$.

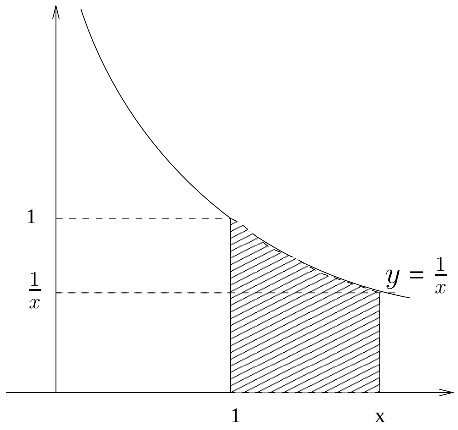


Figura 2.3: A área da região hachurada é $\log x$

Teorema 2.48 *A função $\log : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, satisfaz,*

(a) Se $0 < x < 1$, $\log x < 0$; $\log 1 = 0$ e, se $x > 1$, $\log x > 0$.

(b) É uma função estritamente crescente.

(c) É infinitamente derivável, com $\log'(x) = \frac{1}{x}$ e $\frac{d^m \log}{dx^m}(x) = \frac{(-1)^{m+1}(m-1)!}{x^m}$, $m \geq 1$.

Prova: Trivial e a deixamos ao leitor ∎

Proposição 2.49 *Para x e y positivos tem-se $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.*

Prova: Temos,

$$\log(xy) = \int_1^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^{x} \frac{dt}{t} + \int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \log(x) + \int_x^{xy} \frac{dt}{t}\ .$$

Na última integral, a mudança de variável, de t para s, $t = sx$, $1 \leq s \leq y$, $dt = xds$, acarreta

$$\int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^{y} \frac{xds}{sx} = \log(y) \quad ∎$$

Corolário 2.50 *Seja $x > 0$. Para $r \in \mathbb{Q}$ tem-se $\log(x^r) = r\log(x)$.*

Prova:

Pela Proposição 2.49 o resultado é óbvio se $r \in \mathbb{N}$ e, neste caso, $x^n x^{-n} = 1$ e então, $0 = \log(1) = \log(x^n x^{-n}) = \log(x^n) + \log(x^{-n})$ e portanto, $\log(x^{-n}) = -\log(x^n) = -n\log(x)$. Se $r = \frac{p}{q}$, p, $q \in \mathbb{Z}^*$, temos $p \log x = \log x^p = \log(x^{\frac{p}{q}})^q = q \log x^{\frac{p}{q}}$. Finalmente, $\log x^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q}\log(x)$ ∎

Corolário 2.51 *A função* $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *é inversível e a inversa é contínua.*

Prova:

Sobre a imagem $\log(\,.\,)$ é sobrejetora e, pelo Teorema 2.48(b), injetora. A imagem de um intervalo por uma função contínua é um intervalo. É então claro que $(a, b) = (-\infty, +\infty)$ pois, se $n \in \mathbb{N}$, temos $\lim\limits_{n\to+\infty} \log 2^{\pm n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \pm n \log 2 = \pm\infty$.

Afirmação: $\log^{-1} : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ é contínua. De fato, dado $y_0 \in \mathbb{R}$ e $J = [a, b] \subset (0, \infty)$, $\log^{-1}(y_o) \in (a, b)$, temos que $y_0 \in I = (\log a, \log b)$ e $\log^{-1}(I) \subset (a, b)$ ∎

Definição 2.52 *Indicamos por* e *o único número real tal que* $\log e = 1$.

Definição 2.53 **A função exponencial** $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ *é a inversa da função logaritmo.*

Teorema 2.54 *A função exponencial real é uma bijeção crescente de* $\mathbb{R}$ *sobre* $\mathbb{R}^+$ *satisfazendo,*

(a) É infinitamente diferenciável e $\exp'(x) = \exp(x), \forall\, x \in \mathbb{R}$.

(b) $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

(c) Se $r \in \mathbb{Q}$ *então,* $\exp(r) = e^r$.

Prova: (a)Pelo teorema da função inversa exp é derivável e, pela regra da cadeia,

$$1 = \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\log\circ\exp)(x) = \log'[\exp(x)]\exp'(x) = \frac{1}{\exp(x)}\exp'(x).$$

(b) Temos, $\log[\exp(x + y)] = x + y$ e $\log[\exp(x)\exp(y)] = \log[\exp(x)] + \log[\exp(y)] = x + y$.

(c) Pelo Corolário 2.50 e definição de e tem-se $\log e^r = r\log(e) = r$ e, é óbvio, $\log\exp(r) = r$ ∎

Notação 2.55 $\exp(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Definição 2.56 *Para* $a \in \mathbb{R}, a > 0,$ *e* $x \in \mathbb{R}$, *pomos* $a^x = e^{x\log a}$.

Proposição 2.57 *Temos,* $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ..., \forall x \in \mathbb{R}$.

Prova: Pela fórmula de Taylor[13] para $f = \exp$, $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, existe $\bar{x}$ entre 0 e x tal que

$$e^x = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}\,x^{n+1} \quad .$$

Se $x \in [-R, R]$, $R > 0$ e fixo, temos $\bar{x} \in [-R, R]$, com $f^{(j)}(x) = e^x$, $f^{(j)}(0) = 1$, $f^{(n+1)}(\bar{x}) = e^{\bar{x}}$ e

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \le e^{\bar{x}}\frac{R^{n+1}}{(n+1)!} \le e^R\frac{R^{n+1}}{(n+1)!} \quad .$$

Para $S_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$ temos $|e^x - S_n(x)| \le e^R\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}, \forall |x| \le R$, e $S_n(x)$ converge a $\exp(x)$ (uniformemente sobre $[-R, R]$, veremos) pois, pelo Exemplo 2.46 2(b), $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{R^n}{n!} = 0$, ∎

[13]O inglês B. Taylor (1685-1731) a publicou em 1715. Porém, já era conhecida pelo escocês J. Gregory (1638-1675) e, na Índia, antes de 1550.

Teorema 2.58 *O número* **e** *é irracional e*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}\right) \quad .$$

Prova:

Pela Proposição 2.57 para $x = 1$ [vide Ex. 2.46 1(d) e 1(e)] basta mostrarmos $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \to e$, quando $x \to +\infty$. Como $\log'(y) = \frac{1}{y}$ temos $1 = \log'(1)$ e portanto, pela definição de derivada,

$$1 = \lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)-\log 1}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y} = \lim_{y\to 0}\log(1+y)^{\frac{1}{y}} \quad .$$

Assim, $\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to 0} e^{\log(1+y)^{\frac{1}{y}}} = e^1 = e$ e, substituindo $y = \frac{1}{x}$, $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Quanto à irracionalidade de e, notemos que se $s_n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}$ então,

$$e - s_n = \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+... < \frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+....\right] =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k = \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n\,n!} \quad .$$

Supondo e racional, escrevendo $e = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$ e $mdc(p,q) = 1$, temos $0 < q!(e - s_q) < \frac{1}{q}$, com os números $q!\,e$ e $q!s_q = q!\,(1+1+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{q!})$ inteiros. Logo, $q!\,(e-s_q)$ é um inteiro entre 0 e 1 $\lightning$

Verificando que $0 < e - s_7 < 10^{-4}$, obtemos as primeiras três casas decimais de $e = 2,718....$

A função e^x tem limites $\pm\infty$ em $\pm\infty$, derivadas primeira e segunda estritamente positivas, é estritamente crescente e com concavidade voltada para cima. Os gráficos de e^x e $\log x$, funções inversas uma da outra, são simétricos em relação à bissetriz principal (v. figura 2.4).

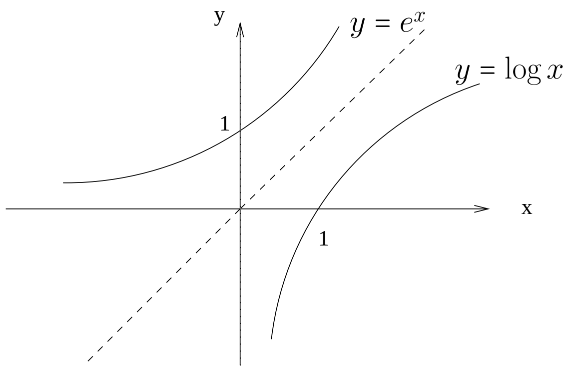


Figura 2.4: Gráficos de $y = e^x$ e $y = \log x$

Apêndice 1 - Comentários sobre e e π.

Os números e e π são mais sofisticados que o outrora desafiador irracional $\sqrt{2}$, o qual satisfaz $x^2 - 2 = 0$. Dizemos **algébricos** os números x que satisfazem uma equação polinomial da forma,

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0\,, a_i \in \mathbb{Z}\,, 0 \le i \le n\,,\ \text{com } a_0 \ne 0\ \ ,$$

por exemplo, $\sqrt[7]{4 + \sqrt[3]{5} + \sqrt[5]{11}}$ é algébrico mas não provaremos este fato aqui. Números não algébricos são **transcendentes** e e e π são dois exemplos, sendo que π surgiu na antiguidade, como a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. O número e é "recente", sendo o escocês John Neper (1550-1617) e Jacques Bernoulli, citado na introdução deste capítulo, dois dos principais nomes ligados a sua origem.

Neper objetivava simplificar operações com grandes números. Para manter próximos os termos numa progressão de potências inteiras de um número dado é mister toma-lo próximo de 1. Neper escolheu $1 - 10^{-7} = 0,9999999$ (vide exerc ??) e, para simplificar multiplicou cada potência por 10^7. Então, se $N = 10^7(1 - 10^{-7})^L$, L é o **logaritmo de Neper** de N. Dividindo seus números e logaritmos por 10^7 teríamos algo próximo de um sistema de logaritmos de base $1/e$ pois $(1 - 1/10^7)^{10^7}$ é próximo de $\lim_{n\to\infty}(1 - 1/n)^n = 1/e$.

Desde a Grécia antiga, procurou-se obter a "quadratura do círculo" por meio de régua e compasso. Isto é, a partir de um círculo de raio 1 contruir um quadrado de igual área. Para tal é necessário um segmento de comprimento $\sqrt{\pi}$. O comprimento de um segmento construtível a partir da unidade com régua e compasso (**número contrutível**) , pode ser obtido a partir das operações elementares, $+$, $-$, . e $\div$ e, ainda, $\sqrt{.}$ e é portanto um número algébrico. Em 1882 o alemão C. Lindemann (1852-1939) mostrou que π é transcendente e consequentemente não construtível e irracional.

A prova acima de que e é irracional é bem mais simples que a "elementar" da irracionalidade de π [Sp], existindo uma prova simples de que π é transcendente que requer métodos "avançados" em álgebra (Teoria de Galois [14]). Isto não deve causar surpresa pois é comum que argumentos "elementares" sejam mais difíceis que os "avançados". Em 1844 o francês J. Liouville (1809-1882) mostrou que e não é construtível e em 1873 seu compatriota C. Hermite (1822-1901) demonstrou a transcendência de e, para a qual existe uma prova elementar, baseada numa idéia do germânico D. Hilbert (1862-1943) [Sp].

Cabe salientar que as provas da transcendência de e e π são praticamente as mesmas o que surprende visto que tais números tem origens bem distintas. Obviamente tal fato é curioso afinal, qual relação pode haver entre e e π ? A resposta a esta questão virá com a apresentação da função exponencial complexa e a fórmula de Euler na seção 4.4.

As notações e e π (e também i para $\sqrt{-1}$) devem-se a Euler. Provavelmente a letra e tenha sido adotada por ser a primeira letra de exponencial.

[14] Évariste Galois (1811-1832), jovem francês, escreveu parte de suas descobertas na noite anterior à sua morte em duelo por motivo passional. Liouville as publicou em 1846.

Capítulo 3

SÉRIES / CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

3.1 - Introdução

Talvez o mais antigo e famoso argumento envolvendo um somatório infinito seja o paradoxo "Dicotomia", de Zenão de Eléia (entre 490 e 485 - c. 430 a.C.),

"Um corredor nunca pode chegar ao fim
de uma corrida pois antes de chegar
ao fim, ele precisa chegar ao meio.
Depois, ao meio do que falta
e assim sucessivamente ad infinitum".

Atualmente, interpretamos tal paradoxo como o cômputo do somatório dos termos de uma progressão geométrica infinita de razão 1/2 e, é claro, tal soma é 1. Porém, para Zenão um somatório infinito não poderia ter soma finita. Quase um século depois, Eudoxo (408-355? a.C.) usou somatários infinitos e computou áreas e volumes (método da exaustão).

Somatórios infinitos enumeráveis são a base do cálculo integral e surgem também com a fórmula de Taylor e outros processos de aproximação. Tendo definido uma forma de somar, dada uma sequência investigaremos se é possível atibuir a ela um valor (a soma da **série**) e veremos que com frequência não seremos capazes de responder qual é este.

O axioma do supremo é a ferramenta teórica a indicar a soma de uma série de termos positivos. Na prática, comparamos a série com uma série geométrica para decidir se existe ou não a soma da série [vide Exemplos 2.46 1(d) e (e)]. Séries de termos positivos e negativos requerem, em geral, cuidados extras e para estas mostraremos uns poucos critérios neste capítulo e o Teorema de Riemann[1] no próximo. Séries em $\mathbb{C}$ são, é claro, redutíveis a duas séries reais.

As séries **absolutamente convergentes** e **condicionalmente convergentes**, introduzidas neste capítulo, serão analisadas mais profundamente no capítulo 4.

[1] O tedesco G. F. B. Riemann (1826-1866) criou a geometria que veio a ser utilizada na física relativística.

3.2 - O Limite de uma Série Convergente. Propriedades Operatórias

Seja $(a_n) \subset \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Na definição a seguir enfatizamos que uma série é determinada por uma sequência e uma forma de somá-la.

Definição 3.1 *Dada uma sequência* $(a_n) \subset \mathbb{K}$, *a* **série de termo geral** a_n *[ou* **série gerada pela sequência** (a_n)*] é o par ordenado* $\big((a_n),(s_n)\big)$, *onde* (s_n) *é* **sequência** (s_n) **das somas parciais de** (a_n), *com* $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, $n \in \mathbb{N}$, **a soma parcial de ordem** n.

Definição 3.2 *A série de termo geral* a_n *é* **convergente** *se a sequência* (s_n) *é convergente e, neste caso,* $s = \lim\limits_{n\to=\infty} s_n \in \mathbb{K}$ *é a* **soma da série** *[ou* **limite da série***] indicada por* $s = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$. *A série de termo geral* a_n *é* **divergente** *se* (s_n) *é divergente.*

Seguindo a tradição indicaremos de forma ambígua a série $\big((a_n),(s_n)\big)$ pelos símbolos $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ ou $\sum^{+\infty} a_n$, que denotam a soma da série de termo geral a_n, se esta é convergente.

Indicamos que a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge por $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n < \infty$ e pomos $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = \pm\infty$ se $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \pm\infty$. Ainda, $\sum\limits_{n\geq p} a_n = \sum\limits_{n=p}^{+\infty} a_n$ é a sequência das somas parciais de (b_n), $b_n = 0$ se $n < p$, $b_n = a_n$ se $n \geq p$.

Para analisarmos se a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge ou não podemos ignorar qualquer quantidade finita de seus termos pois fixado $p \in \mathbb{N}$ temos, para $n > p$, $s_n = s_p + \sum\limits_{m=p+1}^{n} a_m$ e é claro que existe $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ se e só se existe $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{m=p+1}^{n} a_m$. Isto é, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge se e só se $\sum\limits_{n=p+1}^{+\infty} a_n$ converge.

Proposição 3.3 *Seja* $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. *A série* $\sum^{+\infty} a_n$ *converge se, e só se, a sequência das somas parciais,* $s_n = a_1 + ... + a_n$, *é limitada.*

Prova Imediata consequência do Axioma do Supremo ∎

Proposição 3.4 *O espaço das séries em* $\mathbb{K}$ *e convergentes é um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial.*

Prova: Segue da Proposição 2.22 (a) e (b). Deixamos a verificação ao leitor. ∎

Proposição 3.5 (Condição necessária à convergência) *Se* $\sum^{+\infty} a_n$ *converge,* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Prova: É óbvio que $s_{n+1} - s_n = a_n$, $\forall n$, e por hipótese existe $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = x = \lim\limits_{n\to+\infty} s_{n+1}$. Assim,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (s_{n+1} - s_n) = \lim_{n\to+\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to+\infty} s_n \;=\; x - x \;= 0 \quad \blacksquare$$

Exemplo 3.6 *A série* $\sum^{+\infty} \frac{n\pi}{2}$ *diverge pois,* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n\pi}{2} \neq 0$.

Exemplo 3.7 *A* **série geométrica** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n \ldots, z \in \mathbb{C}$, *satisfaz:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}\ , \ \textit{se } |z| < 1\,,\ \textit{e} \ \ \textit{diverge se } |z| \geq 1\,.$$

De fato, $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(1 + z + z^2 + \ldots + z^n\big) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}$, *se* $|z| < 1$ *e, se* $|z| \geq 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} z^n \neq 0$.

Abaixo ilustramos geométricamente a série $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$, $q > 0$. Note-se que se θ é o ângulo indicado na figura então $\cot\theta = \frac{1+q+....+q^n+...}{1} = \frac{1}{1-q} = \frac{q}{q-q^2} = ... = \frac{q^n}{q^n-q^{n+1}} = ...$

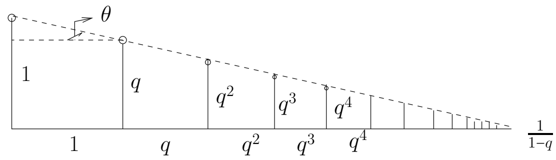


Figura 3.1: Série Geométrica de Razão $q > 0$.

Definição 3.8 A série de Taylor[2] *de* $C^\infty \ni f : (a,b) \to \mathbb{R}$*, em torno de* x_0*, calculada em* x*, é*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \ .$$

A série de Taylor de f computada em x pode convergir ou não a $f(x)$ e mesmo divergir. Se $P_n(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ é o polinômio de Taylor de f em torno de x_0 e $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ é o erro cometido ao aproximarmos $f(x)$ por $P_n(x)$, a série de Taylor de f no ponto x converge a $f(x)$ se, e só se, $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$.

No apêndice provamos as **fórmulas de Taylor com resto integral e de Lagrange**.

Definição 3.9 *A* **série de Maclaurin**[3] *de* $f : (-r,r) \to \mathbb{R}$*,* $r > 0$*, é a série de Taylor em* $x = 0$*.*

Exemplos 3.10 *As séries de Maclaurin de* e^x*,* $sen\, x$ *e* $\cos x$*.*

(a) Pela Proposição 2.57 segue que $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Pela fórmula de Taylor para a função $sen\, x$ na origem temos, fixado $x \in \mathbb{R}$,

$$sen\, x = sen(0) \ + sen'(0)x \ + sen''(0)\frac{x^2}{2!} + ... + \ sen^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \ sen^{(k+1)}(\overline{x})\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\, ,$$

para algum $\overline{x}$ entre 0 e x. É claro que $sen^{(2n)}(x) = (-1)^n sen\, x$ e $sen^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x$ e assim, $sen^{(2n)}(0) = 0$, $sen^{(2n+1))}(0) = (-1)^n$. Ainda mais, $|sen^{(k+1)}(\overline{x})\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}| \le \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}$ e, pelo exemplo 2.46 2(b), $\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} \to 0$ quando $k \to +\infty$. Logo,

$$sen(x) = x - \ \frac{x^3}{3!} + \ \frac{x^5}{5!} - \ \frac{x^7}{7!} + ... + \ (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ + ... \ = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ .$$

(c) Similarmente ao item (b) temos que, $\cos^{(2n)} x = (-1)^n \cos x$, $\cos^{(2n+1)} x = (-1)^{n+1} sen\, x$, $\cos^{(2n)} 0 = (-1)^n$, $\cos^{(2n+1)} 0 = 0$ e

$$\cos(x) = 1 \ - \frac{x^2}{2!} + \ \frac{x^4}{4!} + ... + \ (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + ... \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\, \frac{x^{2n}}{(2n)!} \ .$$

[2] B. Taylor (1715). Tal série já era conhecida pelo escocês J. Gregory (1638-1675) e, na Índia, antes de 1550.

[3] O escocês C. Maclaurin (1698-1746), em 1742. Alguns matemáticos a anteciparam e Gregory já as conhecia para $\tan x$, $\sec x$, $arcsec\, x$ e $\arctan x$, vide Exemplo 3.14. Clio, a musa da história, é com frequência caprichosa ao batizar teoremas.

Exemplo 3.11 **A série harmônica,** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, *diverge*[4]. *Vide Exemplo 2.46 1(c).*

Exemplo 3.12 **A série harmônica generalizada** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, *converge se* $p > 1$ *e diverge se* $p \leq 1$.

De fato, fixado $p > 1$, se s_n é a n-ésima soma parcial da série, para s_{2^n-1} temos

$$s_{2^n-1} = 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \ldots + \left[\frac{1}{(2^{n-1})^p} + \frac{1}{(2^{n-1}+1)^p} + \ldots\ldots + \frac{1}{(2^n-1)^p}\right]$$

$$< 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^p} = \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^m < \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}}, \ \forall n,$$

e como $\sum^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ é uma série de termos positivos, (s_n) é limitada e pela Prop. 3.3 a série converge. Se $p \leq 1$ temos $\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^p} \geq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}$ e, pelo Exemplo 3.11, a série dada diverge.

3.3 - Convergências Absoluta e Condicional. Critério de Cauchy.

Definição 3.13 *A série* $\sum^{+\infty} a_n$, *em* $\mathbb{K}$, *é*

(a) **absolutamente convergente** *se* $\sum^{+\infty} |a_n| < \infty$.

(b) **condicionalmente convergente** *se é convergente e* $\sum^{+\infty} |a_n| = \infty$.

Exemplo 3.14 *A série para* $\log x$, *chamada* **série de Mercator***(1668)*[5], *e a convergência condicional da* **série harmônica alternada***:*

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \ldots\ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots.. , \ -1 < x \leq 1,$$

$$\log \mathbf{2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots.. + (-1)^n \frac{1}{n+1} + \ldots\ldots$$

Verificação: Da progressão geométrica $1 - t + t^2 - t^3 + \ldots.(-t)^n = \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}$, $t \neq -1$, obtemos

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots.(-t)^n + \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}, \quad t \neq -1 \ ,$$

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots. + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \int_0^x \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,dt, \ x \in (-1,1].$$

Caso $x \in [0,1]$: se $0 \leq t \leq x \leq 1$ então $1 \leq 1 + t$ e

$$\left|\int_0^x \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,dt\right| \leq \left|\int_0^x t^{n+1}\,dt\right| = \left|\frac{x^{n+2}}{n+2}\right| \leq \frac{1}{n+2} \xrightarrow{n\to+\infty} 0\ .$$

Caso $x \in (-1,0)$: se $-1 < x \leq t \leq 0$ então $0 < 1 + x \leq 1 + t \leq 1$, $1 \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{1+x}$ e,

$$\left|\int_0^x \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,dt\right| \leq \frac{1}{1+x}\int_x^0 |(-t)^{n+1}|\,dt = \frac{1}{1+x}\frac{|x|^{n+2}}{n+2} \leq \frac{1}{(1+x)(n+2)} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \ \blacksquare$$

[4]N, Oresme (1323?-1382), parisiense e bispo católico, provou este resultado em 1350, um grande feito à época.

[5]O danês N. Mercator (1620-1687), que desenhou as fontes de Versailles. Pietro Mengoli (1625-1686), também danês e um dos principais precursores do estudo de séries infinitas, obteve o mesmo resultado e chamou de **logaritmo natural** os valores determinados por tal série.

Exemplo 3.15 *A série para* $\arctan x$*, dita* **série de Gregory***(1671)*[6] *e a* **série de Leibnitz**,

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} ..... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ... \ , \ |x| \leq 1 \, ,$$

$$\textit{(Leibnitz)} \quad \frac{\pi}{\mathbf{4}} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + ...(-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1} + ... \ .$$

Verificação: Integrando $\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 + ... + (-1)^n t^{2n} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}$, $t \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} .... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2} dt \ , \ x \in \mathbb{R} \ .$$

Concluímos mostrando que para $|x| \leq 1$ a integral tende a zero:

$$|(-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2} dt \, | \leq | \int_0^x t^{2(n+1)} \, dt| \ \leq \ |\frac{x^{2n+3}}{2n+3}| \ \leq \ \frac{1}{2n+3} \xrightarrow{n \to +\infty} 0 \ \blacksquare$$

A série de Leibnitz é condicionalmente convergente pois $\frac{1}{2n-1} \geq \frac{1}{2n}$ e $\sum^{+\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

Critério 3.16 (de Cauchy para séries numéricas)[7] *A série* $\sum^{+\infty} a_n$*, em* $\mathbb{K}$*, é convergente se, e só se,* $\forall \, \epsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| < \epsilon, \forall N > n_0, \forall p \in \mathbb{N}$.

Prova É claro que $|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| = |s_{n+p} - s_n|$, s_n a n-ésima soma parcial da série, e que a série converge se, e só se, (s_n) é uma sequência de Cauchy. Donde, a tese $\blacksquare$

O teorema a seguir é fundamental, segue trivialmente do Critério de Cauchy (3.16), será provado elementarmente no Lema 4.2, e abaixo mostramos uma outra e simples prova.

Teorema 3.17 *Toda série, em* $\mathbb{K}$*, absolutamente convergente é convergente.*

Prova Uma série em $\mathbb{C}$ converge absolutamente se, e só se, suas partes real e imaginária também, pois $|Re(z)|, \ |Im(z)| \ \leq |z| \ \leq \ |Re(z)| + |Im(z)|, \forall z \in \mathbb{C}$. Assim, suponhamos a série em $\mathbb{R}$. Para $\sum^{+\infty} |a_n| < +\infty$, $a_n \in \mathbb{R}$, temos, $0 \leq \ a_n + |a_n| \leq \ 2|a_n|$ e, $\sum^{+\infty} (a_n + |a_n|)$ é uma série em $[0, +\infty)$ com sequência das somas parciais limitada superiormente por $2 \sum^{+\infty} |a_n|$. Pela Prop. 3.3, $\sum^{+\infty} (a_n + |a_n|)$ converge e, como $\sum^{+\infty} (-|a_n|) < \infty$, $\sum^{+\infty} a_n = \sum^{+\infty} (a_n + |a_n|) + \sum^{+\infty} -|a_n|$ também $\blacksquare$

3. 4 - Critérios para Convergência Absoluta

Critério 3.18 (da Comparação) *Sejam* $\sum^{+\infty} a_n$ *e* $\sum^{+\infty} b_n$ *séries em* $\mathbb{C}$*. Se existem* $c > 0$ *e* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tais que* $|a_n| \leq c|b_n|, \forall n > n_0$*, e* $\sum^{+\infty} |b_n| < \infty$ *então* $\sum^{+\infty} |a_n| < \infty$.

Prova: Segue do teorema acima $\blacksquare$

Exemplo 3.19 *Temos* $\sum^{+\infty} \frac{1}{n} sen \frac{1}{n} < \infty$ *pois (como* $sen\theta < \theta$ *se* $\theta > 0$*)* $\frac{1}{n} sen \frac{1}{n} < \frac{1}{n^2}$ *e* $\sum^{+\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$.

Exemplo 3.20 *Temos* $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log n} = +\infty$ *pois (*$e^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{n^p}{p!} \geq n$ *e* $\log n \leq n$*)* $\frac{1}{\log n} \geq \frac{1}{n}$ *e* $\sum^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

[6]Gregory foi o introdutor do termo convergência e deduziu a série de Leibnitz antes que este.

[7]Bolzano, em 1817, antecipou o Critério de Cauchy, com uma prova "circular", como era de se esperar.

Critério 3.21 (do Limite) *Sejam, em* $\mathbb{C}$, $\sum^{+\infty} a_n$ *e* $\sum^{+\infty} b_n$, b_n *'s* $\neq 0$, *com* $\lim \frac{|a_n|}{|b_n|} = L \in [0, +\infty]$.

(a) Se $L = 0$, $\sum^{+\infty} |b_n| < \infty \Rightarrow \sum^{+\infty} |a_n| < \infty$.

(b) Se $0 < L < +\infty$, $\sum^{+\infty} |a_n| < \infty \Leftrightarrow \sum^{+\infty} |b_n| < \infty$.

(c) Se $L = +\infty$, $\sum^{+\infty} |b_n| = +\infty \Rightarrow \sum^{+\infty} |a_n| = +\infty$.

Prova (a) Se $L = 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| \leq |b_n|$, $\forall n \geq n_0$. Logo, $\sum_{n_o}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n_0}^{\infty} |b_n| < +\infty$.

(b) Existe n_0 tal que, se $n \geq n_0$, $|b_n|\frac{L}{2} \leq |a_n| \leq \frac{3L}{2}|b_n|$. A tese segue do Critério da Comparação.

(c) Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_0$, $|a_n| \geq |b_n|$. Logo, $\sum_{n \geq n_0}^{+\infty} |a_n| \geq \sum_{n \geq n_0}^{+\infty} |b_n| = +\infty$ ■

Exemplo 3.22 *Temos* $\sum^{+\infty} \frac{13n^3+2n-3}{n^7+4n^5-3n^2+20} < \infty$ *pois a série* $\sum^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ *é convergente e*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{13n^3+2n-3}{n^7+4n^5-3n^2+20}}{\frac{1}{n^4}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4(13n^3+2n-3)}{n^7+4n^5-3n^2+20} = \lim_{n\to+\infty} \frac{13+\frac{2}{n^2}-\frac{3}{n^3}}{1+\frac{4}{n^2}-\frac{3}{n^5}+\frac{20}{n^7}} = 13 \ .$$

Exemplo 3.23 *:* $\sum^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} = +\infty$ *pois [v. 2.46 1(f) (f)]* $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$ *e* $\sum^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

A apresentação dos critérios da raíz e da razão é razoavelmente geral, e utiliza os conceitos de $\limsup$ e $\liminf$. Com frequência, mas não sempre, poderemos substituir tais limites pelo usual. Abaixo, enfatizamos tais fatos e relacionamos os três limites citados com os dois critérios.

Teste 3.24 (da Raíz)[8] *Seja* $\sum^{+\infty} a_n$, *em* $\mathbb{C}$, *tal que* $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = R \in [0, +\infty]$.

(a) Se $R < 1$, *a série* $\sum^{+\infty} a_n$ *é absolutamente convergente.*

(b) Se $R > 1$ *a série* $\sum^{+\infty} a_n$ *é divergente.*

(c) Se $R = 1$ *nada se pode afirmar sobre a convergência de* $\sum^{+\infty} a_n$.

Prova:

(a) Fixando λ tal que $R < \lambda < 1$, pelo Corolario 2.43 existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$ então $\sqrt[n]{|a_n|} < \lambda$ e assim, $|a_n| < \lambda^n$. Logo, pelo critério da comparação, $\sum^{+\infty} |a_n|$ converge.

(b) Para λ tal que $\lim sup \sqrt[n]{|a_n|} > \lambda > 1$ existe subsequência (a_{n_k}) satisfazendo $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \lambda$. Donde, $|a_{n_k}| > \lambda^{n_k} > 1$, $\forall k$, e portanto $\sum^{+\infty} |a_n| = +\infty$.

(c) A série $\sum^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge enquanto $\sum^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 1$, converge. Porém, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^p}} = 1$ ■

Observação: Destaquemos que se existir $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ então $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$.

[8] Também dito **Critério de Cauchy** (1821), o qual o enunciou: " Ache o limite ou os limites para os quais a expressão $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ converge quando n cresce indefinidamente e denote por k o maior destes limites, ou, em outras palavras, o limite dos maiores valores da dita expressão. A série será convergente se $k < 1$ e divergente se $k > 1$".

Teste 3.25 (da Razão)[9] *Seja* $\sum^{+\infty} a_n$, *em* $\mathbb{C}$, $a_n's \neq 0$, $r = \liminf \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ *e* $R = \limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

(a) Se $R < 1$, *a série* $\sum^{+\infty} a_n$ *é absolutamente convergente.*

(b) Se $r > 1$ *ou* $r = +\infty$, *a série* $\sum^{+\infty} a_n$ *é divergente.*

(c) Se $r \leq 1 \leq R$, *nada se pode afirmar sobre a convergência de* $\sum^{+\infty} a_n$.

Prova

(a) Seja $\lambda \in \mathbb{R}$, $R < \lambda < 1$, e $n_0 \in \mathbb{N}$ dado pelo Corolário 2.43 tal que, para $n > n_0$, $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < \lambda$. Então, se $n > n_0$, $|a_n| = \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}\frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|}...\frac{|a_{n_0+1}|}{|a_{n_0}|}|a_{n_0}| \leq \lambda^{n-n_0}|a_{n_0}|$, donde segue $\sum|a_n| < +\infty$.

(b) Neste caso existe n_0 tal que, se $n > n_0$, $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$ e portanto, $|a_{n+1}| \geq |a_n| \geq |a_{n_0}|$.

(c) Os exemplos citados no critério da raíz servem aqui também (vide Exemplos 3.26) ∎

Observação: Em particular (com a notação do Teste 3.25) se existir $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ então $r = R$.

Exemplos 3.26 *Consideremos as séries abaixo.*

(a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + ...$ converge pelo teste da raíz e o da razão é aqui inconclusivo:

$$\liminf \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[2n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \limsup \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[2n]{\frac{1}{2^{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0\,, \qquad \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty\,,$$

(b) Analogamente para $\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{64} + ...$ pois,

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{8}, \quad \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2\,,$$

$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$ se n é ímpar, $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2}{2^{n-1}}} = \frac{\sqrt[n]{4}}{2}$ se n é par e portanto $\lim \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$ ∎

Exemplos 3.27 *As séries complexas obtidas das séries de Mclaurin de* e^x, *sen*x *e* $\cos x$, *trocando a variável* $x \in \mathbb{R}$ *pela variável* $z \in \mathbb{C}$ *convergem absolutamente em todo o plano complexo.*

Verificação: Sendo as séries, respectivamente, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ (v. 3.10), basta mostrar $\sum^{+\infty} \frac{|z|^n}{n!} < \infty$ pois as outras duas são, em valor absoluto, majoradas por ela. Pelo critério da razão temos $\lim\left|\frac{z^{n+1}n!}{(n+1)!z^n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$ ∎

Teorema 3.28 *Seja* (x_n) *uma sequência limitada em* $(0, +\infty)$. *Temos,*

$$lim\,inf \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \lim\,inf \sqrt[n]{x_n} \leq lim\ sup \sqrt[n]{x_n} \leq lim\ sup \frac{x_{n+1}}{x_n}\,.$$

Em particular, se $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L \in [0, +\infty]$ *então* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

[9] Também chamado **Critério ou Teste de D'Alembert**, já era bem conhecido anteriormente a D'Alembert.

Prova Basta provar lim $sup \sqrt[n]{x_n} \le\ lim\ sup \frac{x_{n+1}}{x_n}$ pois assim, para a sequência $(\frac{1}{x_n})$ teremos lim $sup \frac{1}{\sqrt[n]{x_n}} \le$ lim $sup \frac{x_n}{x_{n+1}}$. Logo, de lim $sup \frac{1}{\sqrt[n]{x_n}} = \frac{1}{\lim\ inf\ \sqrt[n]{x_n}}$ e lim $sup \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{\lim\ inf \frac{x_{n+1}}{x_n}}$ seque a desigualdade para o $\liminf$.

Então, é suficiente provarmos que $c > q = lim\ sup \frac{x_{n+1}}{x_n} \Rightarrow lim\ sup \sqrt[n]{x_n} \le c$. Dado $c > q$, q o maior valor de aderência de $(\frac{x_{n+1}}{x_n})$, $\exists p \in \mathbb{N}$ tal que, $n > p \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} \le c$. Logo, para $n > p$,

$$\frac{x_{p+1}}{x_p} \le c\,, \frac{x_{p+2}}{x_{p+1}} \le c, ..., \frac{x_n}{x_{n-1}} \le c \quad .$$

Multiplicando estas desigualdades membro a membro obtemos $\frac{x_n}{x_p} \le c^{n-p} = \frac{c^n}{c^p}$. Pondo $k = \frac{x_p}{c^p}$ vemos que k independe de n e, $x_n \le k\,c^n, \forall n > p$. Assim, $\sqrt[n]{x_n} \le \sqrt[n]{k}\,c, \forall n > p$. Portanto, como lim $\sqrt[n]{k} = 1$, concluímos que lim $sup \sqrt[n]{x_n} \le$ lim $sup(\sqrt[n]{k}\,c)$ = lim $\sqrt[n]{k} c = c$ ■

Assim, lim $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L \in [0, +\infty] \Rightarrow$ lim $\sqrt[n]{|a_n|} = L$. No apêndice temos outra prova deste fato.

Exemplo 3.29 *Seja* $0 < a < b$ *e* $(x_n) = (a, ab, a^2b, a^2b^2, a^3b^2, a^3b^3, ...)$. *Se* n *é par,* $\frac{x_{n+1}}{x_n} = a$, $x_n = (ab)^{\frac{n}{2}}$ *e* $\sqrt[n]{x_n} = \sqrt{ab}$. *Senão,* $\frac{x_{n+1}}{x_n} = b$, $x_n = (ab)^{\frac{n-1}{2}} a$ *e* $\sqrt[n]{x_n} = (ab)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}} \sqrt[n]{a} = \sqrt{ab}\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[2n]{ab}}$ *e*

$$\liminf \frac{x_{n+1}}{x_n} = \min(a, b)\,, \quad \limsup \frac{x_{n+1}}{x_n} = \max(a, b)\,, \quad \lim \sqrt[n]{x_n} = \sqrt{ab} \quad ■$$

Pelos Exemplos 3.26 (b) e 3.29 vemos que pode existir o limite da raíz e não o na razão. O teste da razão é geralmente mais fácil de aplicar enquanto o teste da raíz é mais eficiente.

Exemplo 3.30 *Temos* lim $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$. *Logo,* $\sum\limits^{+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$, lim $\sqrt[n]{n!} = +\infty$ *e* lim $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

Verificação: Pelo teste da razão lim $\frac{(n+1)^{n+1}\,n!}{(n+1)!\,n^n} = \lim(\frac{n+1}{n})^n = \lim(1+\frac{1}{n})^n = e$ e a série diverge. Pelo Teorema 3.28, lim $\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$ = lim $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$ e, por fim, lim $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ = lim $\frac{1}{n}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = 0.e = 0$ ■

Exemplo 3.31 *A série* $\sum\limits^{+\infty} nz^n$ *converge absolutamente se* $|z| < 1$ *e diverge se* $|z| \ge 1$.

Verificação: Pelo teste da raíz (é também fácil aplicar o da razão), lim $\sqrt[n]{n|z|^n} = |z|$ lim $\sqrt[n]{n} = |z|$ e $\sum |nz^n| < \infty$ se $|z| < 1$. Se $|z| \ge 1$ temos $|z|^n \ge 1$, $\lim n|z|^n = +\infty$, $\lim nz^n \ne 0$ e $\sum\limits^{+\infty} nz^n$ diverge ■

Critério 3.32 (da Integral) *Seja* $\sum\limits^{+\infty} a_n$, $a_n \ge 0$, *e* $f : [p\,, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$, *contínua e decrescente, com* $a_n = f(n), \forall n \ge p$. *Temos,*

$$\int_p^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$$

Prova:

Se $k \ge p$ e $x \in [k,\, k+1]$ então, $a_{k+1} \le f(x) \le a_k$, $\ a_{k+1} \le \int_k^{k+1} f(x)\,dx \le a_k$ e,

$$\sum_p^n a_{k+1} \ \le\ \sum_p^n \int_k^{k+1} f(x)\,dx \ =\ \int_p^{n+1} f(x)\,dx \ \le \sum_p^n a_k\ .$$

Logo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n < \infty$ se, e somente se, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_p^{n+1} f(x)\,dx = \int_p^{+\infty} f(x)\,dx < \infty$ ■

Dada $\sum\limits^{+\infty} a_n$, uma função como no critério da integral sempre existe [definimos f em $[n, n+1]$ tendo por gráfico o segmento unindo (n, a_n) e $(n+1, a_{n+1})$] mas, em geral, não é útil.

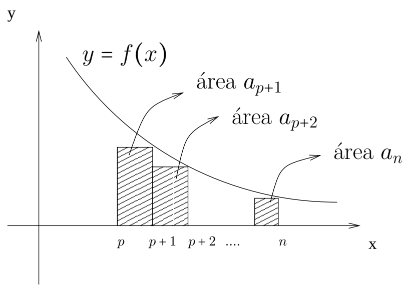


Figura 3.2: Ilustração para o Critério da Integral.

Exemplo 3.33 *Pelo critério da integral,* $\sum^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$, *converge se, e só se,* $p > 1$.

De fato, se $p \leq 0$ é óbvio que a divergência. Se $p > 0$, $\frac{1}{x^p}$ decresce e o resultado segue da fórmula

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \lim\limits_{M\to+\infty} \frac{x^{-p+1}}{1-p}\Big|_1^M = \lim\limits_{M\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{M^{p-1}}}{p-1}\ ,\ p \neq 1\,, \\ \\ \lim\limits_{M\to+\infty} \log\Big|_1^M = \lim\limits_{M\to+\infty} \log M\ , p = 1 \quad \blacksquare \end{cases}$$

Exemplo 3.34 *Supondo* $\alpha, \beta > 0$, *temos* $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta} < \infty$ *se, e só se,* $\alpha > 1$ *ou,* $\alpha = 1$ *e* $\beta > 1$.

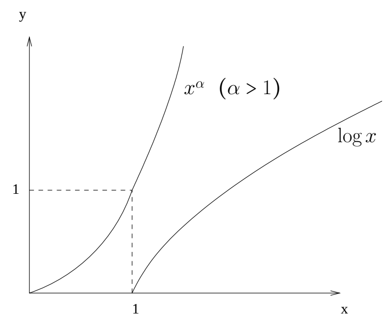


Figura 3.3: Gráficos de x^α, $\alpha > 1$, e $\log x$.

Verificação: Se $\alpha > 1$ então $\frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ e, como $\sum^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty$, a série dada converge.

Suponhamos agora $0 < \alpha \leq 1$. Como $f(x) = \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}$, $x \geq 3$, é contínua e decrescente analisemos $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta} dx$. Com a mudança de variável $y = \log x$ obtemos $x = e^y$, $dx = e^y dy$ e

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta} dx = \int_{\log 3}^{+\infty} \frac{e^y}{e^{\alpha y} y^\beta} dy = \int_{\log 3}^{+\infty} \frac{e^{(1-\alpha)y}}{y^\beta} dy\ .$$

Se $\alpha < 1$, dado $N \in \mathbb{N}$ $\exists\, c_N > 0$ com $e^{(1-\alpha)y} \geq c_N y^N$, $\forall y \geq 0$, e então $\int_{\log 3}^{+\infty} \frac{e^{(1-\alpha)y}}{y^\beta} dy = +\infty$ e pelo Critério 3.33 a série diverge. Se $\alpha = 1$, $\int_{\log 3}^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\beta} dx = \int_{\log 3}^{+\infty} \frac{1}{y^\beta} dy < \infty$ se, e só se, $\beta > 1$ $\blacksquare$

Abaixo está hachurada a região dos parâmetros $\alpha, \beta > 0$ tais que a série acima converge.

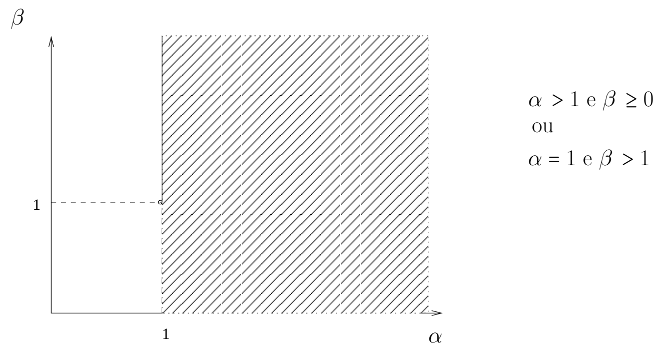


Figura 3.4: $\{(\alpha,\beta) : \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\log n)^{\beta}} < \infty\}$.

As **séries de Abel** são as séries do tipo $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\log n)^{\beta}}$, $\beta > 0$. Pelo Exemplo 3.34 acima tais séries convergem se $\beta > 1$ e divergem se $\beta = 1$.

Critério 3.35 (Comparação de Razões) *Sejam* $\sum^{+\infty} a_k$ *e* $\sum^{+\infty} b_k$ *em* $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$. *Suponhamos que exista* $p \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq \left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right|, \ \forall\ k\ \geq p.$$

Se $\sum^{+\infty} |b_k|$ *converge então* $\sum^{+\infty} |a_k|$ *converge. Equivalentemente,* $\sum^{+\infty} |a_k| = +\infty \Rightarrow \sum^{+\infty} |b_k| = +\infty$.

Prova Da hipótese temos, para $k \geq p$, $|\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}| \leq |\frac{a_k}{b_k}|$. Logo, para $k \geq p$ a sequência $\frac{|a_k|}{|b_k|}$ decresce, $\frac{|a_k|}{|b_k|} \leq \frac{|a_p|}{|b_p|}$, e então, $|a_k| \leq \frac{|a_p|}{|b_p|}|b_k|$. Pelo critério da comparação, segue a tese ■

Se $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, o teste da razão (e o da raíz) aplicado à série $\sum^{+\infty} a_n$ é inconclusivo. Em tal caso, é útil o Critério de Raab abaixo descrito. Antes, mostremos uma generalização simples da Desigualdade 2.8 (Bernoulli) .

Lema 3.36 *(Generalização da Desigualdade de Bernoulli) Se* $\alpha \geq 1$ *e* $x \geq -1$, $(1+x)^{\alpha} \geq 1 + \alpha x$.

Prova Para $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, $x \in \mathbb{R}$, temos $f'' \geq 0$, $f'(0) = \alpha$, f tem concavidade voltada para cima e reta tangente em $(0,1)$ dada por $y = 1 + \alpha x$. Logo, $(1+x)^{\alpha} \geq 1 + \alpha x$ ■

Critério 3.37 (Raabe) *Seja* $\sum^{+\infty} a_n$, *uma série em* $\mathbb{C}$, $|a_n| \neq 0, \forall n$, *tal que*

$$\lim_{n\to+\infty} n(1 - |\frac{a_{n+1}}{a_n}|) = L \in [-\infty, +\infty]$$

(a) Se $L > 1$, $\sum^{+\infty} a_n$ *é absolutamente convergente.*

(b) Se $L < 1$, $\sum^{+\infty} |a_n|$ *diverge. Pode ocorrer que* $\sum^{+\infty} a_n$ *convirja.*

(c) Se $L = 1$ *o critério nada revela.*

Prova:

(a) Seja α tal que $1 < \ \alpha < L$. Então, existe $N \in \mathbb{N}$ para o qual

$$k\left(1 - |\frac{a_{k+1}}{a_k}|\right) \ > \ \alpha \ , \ \ \forall k \ \geq \ N \ ,$$

e assim, $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| < 1 - \frac{\alpha}{k}$. Aplicando o Lema 3.36 com $x = -\frac{1}{k}$ obtemos,

$$|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \ < \ 1 - \frac{\alpha}{k} \ \leq \ (1 - \frac{1}{k})^{\alpha} = \frac{\frac{1}{k^{\alpha}}}{\frac{1}{(k-1)^{\alpha}}} = \frac{b_{k+1}}{b_k} \ , \ \ b_k = \frac{1}{(k-1)^{\alpha}} \ \ .$$

Como $\sum^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} < \infty$ $(\alpha > 1)$, pelo Critério 3.35 (comparação entre razões) $\sum^{+\infty} |a_k|$ converge.

(b) Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que, se $k \ \geq \ N$, $k\left(1 - |\frac{a_{k+1}}{a_k}|\right) \ \leq 1$. Assim,

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \ \geq \ 1 - \frac{1}{k} \ = \ \frac{k-1}{k} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k-1}} = \frac{b_{k+1}}{b_k} \ , \ \ b_{k+1} = \frac{1}{k} \ \ .$$

Como a série harmônica diverge, pelo critério de comparações de razões, $\sum^{+\infty} a_k$ diverge.

A série $\sum^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1).....(\alpha-n+1)}{n!}$, $-1 < \alpha < 0$, é condicionalmente convergente (v. Exemplo 3.49). No Ex. 3.38 abaixo é mostrado que $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1 - |\frac{a_{n+1}}{a_n}|) = \alpha + 1 < 1$.

(c) Pelo Exemplo 3.34, $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{k \log k}$ diverge e o teste de Raabe nos leva a analisar o limite de,

$$k\left(1 - \frac{k \log k}{(k+1)\log{(k+1)}}\right) = \ \frac{k}{k+1}\left[1 + \frac{\log(1+\frac{1}{k})^k}{\log(k+1)}\right] \ .$$

Ainda por 3.34, $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(\log k)^2} < \infty$ converge e o teste de Raabe nos conduz ao limite de,

$$k\left[1 - \frac{k\log^2 k}{(k+1)\log^2(k+1)}\right] = \frac{k}{k+1}\left[1 + k\frac{\log^2(k+1) - \log^2 k}{\log^2(k+1)}\right] \ = \frac{k}{k+1}\left[1 + \frac{\log(1+\frac{1}{k})^k}{\log(k+1)}\frac{\log k(k+1)}{\log(k+1)}\right] \ .$$

É claro que $\lim \frac{k}{k+1} = 1$, $\lim \frac{\log(1+\frac{1}{k})^k}{\log(k+1)} = 0$ e, pela regra de L'Hospital, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log x(x+1)}{\log(x+1)} = 2$.

Assim, o limite obtido pelo teste de Raabe para ambas as séries é 1 ∎

Exemplo 3.38 *Se* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}|$ *converge se* $\alpha > 0$ *e diverge se* $\alpha < 0$.

Verificação: Seja a_n o termo geral da série dada. Temos, para $n \to +\infty$,

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n\left(1 - |\frac{\alpha - n}{n+1}|\right) = n\left(1 - \frac{n - \alpha}{n+1}\right) \ \to \ \alpha + 1 \ .$$

A afirmação segue então imediatamente do Critério 3.37, de Raabe ∎

3. 5 - Série Binomial[10]

Generalizemos a fórmula binomial para expoente $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(n-m)!}$ e $\binom{m}{0} = 1$,

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n = \sum_{n=0}^{m} \frac{m!}{n!(m-n)!} x^n = \sum_{n=0}^{m} \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!} x^n \, ,$$

trocando no último somatório à direita a variável inteira e positiva m por $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{N}$.

Lema 3.39 *Se $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{N}$ a série infinita $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ converge se $|x| < 1$.*

Prova:

Os coeficientes desta série são não nulos e a afirmação segue do Teste da Razão pois,

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(\alpha-n)x}{n+1} \right| = |x| \quad \blacksquare$$

Resta mostrar que esta série converge a $f(x) = (1+x)^\alpha$, o que não é óbvio. Temos

$$\begin{cases} f(x) = (1+x)^\alpha & f(0) = 1\,, \\ f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} & f'(0) = \alpha \\ f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} & f''(0) = \alpha(\alpha-1) \\ \text{etc.,} & \end{cases}$$

e com a notação $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}$, $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{N}$, os coeficientes da série de Maclaurin de f são,

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!} = \binom{\alpha}{n} .$$

Teorema 3.40 (Binomial) *Se $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{N}$ então $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ se $|x| < 1$.*

Prova:

Pela fórmula de Taylor em torno de $x = 0$ com resto integral, dado $N \in \mathbb{N}$ temos,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{N} \binom{\alpha}{n} x^n + R_{N;0}(x) \; ; \quad R_{N;0}(x) = \int_0^x \frac{f^{N+1}(t)}{N!} (x-t)^N \, dt \; .$$

Mostremos que $\lim\limits_{N\to+\infty} R_{N;0}(x) = 0$, se $|x| < 1$. É fácil ver que

$$\frac{f^{N+1}(t)}{N!} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-N)}{N!} (1+t)^{\alpha-N-1} = \alpha \binom{\alpha-1}{N} (1+t)^{\alpha-N-1},$$

$$R_{N;0}(x) = \alpha \binom{\alpha-1}{N} \int_0^x (1+t)^{\alpha-N-1} (x-t)^N \, dt \; .$$

[10]Sua descoberta é atribuída a Newton (em uma carta de 1664 ou 1665) que nunca a publicou ou provou e, ainda, outros já a haviam estudado. O destaque de Newton deve-se a ele ter mostrado que as séries infinitas não deviam ser vistas como aproximações mas como outras formas das funções que representam e estabelecido regras operatórias para séries reais da forma $\sum a_n x^n$ tais como divisão e multiplicação. Abel mostrou a série binomial complexa para $(1+z)^\sigma$, com $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, e $\sigma \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{N}$, sujeita a uma definição apropriada de $(1+z)^\sigma$.

Analisemos o integrando na fórmula para o resto. No caso $x > 0$ temos $0 \le t \le x < 1$, $1+t \ge 1$, $0 < (x-t) \le x$ e, para $N > \alpha - 1$ [isto é, $\alpha - N - 1 < 0$]: $0 \le (1+t)^{\alpha-N-1}(x-t)^N \le x^N$ e

$$|R_{N;0}(x)| \le \left|\alpha\binom{\alpha-1}{N}\right| \int_0^x x^N\,dt = \left|\alpha\binom{\alpha-1}{N}\right| x^{N+1}.$$

Para $x < 0$ escrevemos o integrando na forma $\left|\frac{(x-t)^N}{(1+t)^N}(1+t)^{\alpha-1}\right|$. Como $-1 < x \le t \le 0$, temos $1 \ge \frac{t}{x} \ge 0$ e ainda, $0 < 1+x \le 1+t \le 1$; donde obtemos $(1+t)^{\alpha-1} \le C$, $C = \max\big(1, (1+x)^{\alpha-1}\big)$, e

$$\frac{|x-t|}{|x+t|} = |x|\left|\frac{1-\frac{t}{x}}{1+\frac{t}{x}}\right| = |x|\frac{1-\frac{t}{x}}{1+\frac{t}{x}} \le |x| .$$

Logo, $\left|\frac{(x-t)^N}{(1+t)^N}(1+t)^{\alpha-1}\right| \le C|x|^N$ e, analogamente ao caso anterior, $|R_{N;0}(x)| \le C\left|\alpha\binom{\alpha-1}{N}\right||x|^{N+1}$.

Como $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha-1}{n}x^n < \infty$, $|x| < 1$, obtemos $\lim\limits_{N\to+\infty}\binom{\alpha-1}{N}x^N = 0$ e $\lim\limits_{N\to+\infty} R_{N;0}(x) = 0$ se $|x| < 1$ ∎

Tal série inclui várias funções, vide exemplo abaixo, e é útil para obter desenvolvimentos em séries para outras funções (exemplificaremos no capítulo 4). Quanto à convergência nos extremos $x = \pm 1$, vide Exemplos 3.38 e 3.49 e Lista 4, Exercício 8.

Exemplo 3.41 *Temos,*

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2n} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1.3....(2n+1)}{2.4.....(2n)}x^{2n}, \ \textit{se } |x| < 1.$$

Verificação:

Mera consequência do Teorema Binomial pois,

$$\begin{aligned}(-1)^n\binom{-1/2}{n} &= (-1)^n\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)....(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} \\ &= \frac{(1/2)(3/2)...(1/2+n-1)}{n!} = \frac{1/2.3/2....(2n+1)/2}{n!} \\ &= \frac{1.3.....(2n+1)}{2^n\,n!} = \frac{1.3.....(2n+1)}{2.4....(2n)}, \text{ se } n \ne 0 \ ∎\end{aligned}$$

.

3. 6 - Critérios para Convergência Não Necessariamente Absoluta

Proposição 3.42 (Série Telescópica) *Dada $(b_n)_{n\ge 0} \subset \mathbb{C}$, a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$, com $a_n = b_n - b_{n+1}$, converge se, e somente se, a sequência (b_n) converge e, neste caso,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_0 - \lim b_n .$$

Prova: Trivial pois, $\sum^{+\infty} a_n$ converge se, e só se, $s_n = (b_0 - b_1) + ... + (b_n - b_{n+1}) = b_0 - b_{n+1}$, $n \ge 0$, converge e, sendo este o caso, o limite da série é $\lim s_n = b_0 - \lim b_n$ ∎

Exemplo 3.43 *A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ é telescópica e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$.*

Verificação: A N-ésima soma parcial, $s_N = \sum\limits_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}$, converge a 1 ∎

Critério 3.44 (Dirichlet[11]) *Em* $\mathbb{C}$*, seja* $\sum^{+\infty} a_n$ *com sequência das somas parciais limitada (convergente ou não) e* (b_n) *uma sequência decrescente,* $\lim b_n = 0$*. Então,* $\sum^{+\infty} a_n b_n$ *converge.*

Prova

Seja (s_n) a sequência das somas parciais de $\sum^{+\infty} a_n$. Temos,
$a_1b_1 + a_2b_2 = a_1(b_1 - b_2) + (a_1 + a_2)b_2 = s_1(b_1 - b_2) + s_2b_2$,
$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = s_1(b_1 - b_2) + s_2b_2 + a_3b_3 = s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + s_3b_3$,
e, de forma geral (verifique, a indução é simples),

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots\ldots + a_nb_n = \sum_{i=2}^{n} s_{i-1}(b_{i-1} - b_i) \ + \ s_nb_n \ .$$

Para $M \in \mathbb{R}$, $|s_n| \leq M$, temos $\sum_{n=2}^{+\infty} |s_{i-1}(b_{i-1} - b_i)| \leq M \sum_{n=2}^{+\infty} (b_{i-1} - b_i) = Mb_1$. Logo, $\sum_{n=2}^{+\infty} s_{i-1}(b_{i-1} - b_i)$ converge absolutamente, é convergente e, como $\lim s_nb_n = 0$, a série $\sum^{+\infty} a_nb_n$ é convergente ■

No exercício ... exibimos uma série apropriada a aplicarmos o Critério de Dirichlet.

Critério 3.45 (Abel[12]) *Se* $\sum^{+\infty} a_n$ *é convergente e* (b_n) *é uma sequência decrescente de números positivos (não necessariamente tendendo a zero) então, a série* $\sum^{+\infty} a_nb_n$ *é convergente.*

Prova

Para $c = \lim b_n$, $(b_n - c) \searrow 0$. Logo, pelo Critério de Dirichlet $\sum^{+\infty} a_n(b_n - c)$ é convergente e, devido à hipótese, $\sum^{+\infty} ca_n = c\sum^{+\infty} a_n$ também e assim $\sum^{+\infty} a_nb_n$ ■

3. 7 - Critério para Convergência de uma Série Alternada

Critério 3.46 (Leibnitz, 1682) *Se* (a_n) *é decrescente e* $\lim a_n = 0$*, então* $\sum^{+\infty} (-1)^n a_n$ *converge e*

$$\Big|\sum^{+\infty} (-1)^n a_n - s_m\Big| \leq a_{m+1}\,, \quad s_m = a_1 + \ldots + a_m\,, \forall m \in \mathbb{N}\ .$$

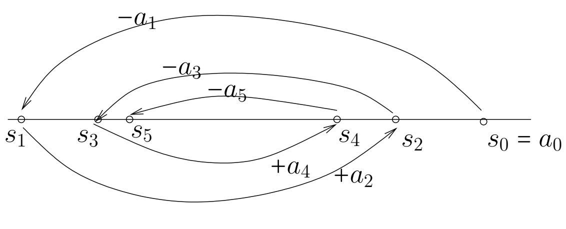


Figura 3.5: Critério de Leibnitz.

[11] O alemão P. G. L. Dirichlet (1805-1859) é o precursor do conceito moderno de função como correspondência.

[12] O jovem norueguês N. H. Abel (1802-1829), aos dezenove anos, provou a impossibilidade da resolução por radicais das equações algébricas de grau maior ou igual a cinco. O italiano P. Ruffini (1765-1822) dera uma prova de tal resultado, menos satisfatória e que passara despercebida, em 1799.

Prova: Se (s_n) é a sequência das somas parciais, (s_{2n}) é decrescente e (s_{2n+1}) é crescente.

De fato, $s_{2n} = s_{2n-2} - a_{2n-1} + a_{2n} = s_{2n-2} - (a_{2n-1} - a_{2n}) \le s_{2n-2}$, já que $a_{2n-1} - a_{2n} \ge 0$ e, analogamente, $s_{2n+1} = s_{2n-1} + (a_{2n} - a_{2n+1}) \ge s_{2n-1}$, pois $a_{2n} - a_{2n+1} \ge 0$.

Ainda, como $s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1} \ge 0$, dados i ímpar e p par, para i^* ímpar e maior que i e p temos, $s_i \le s_{i^*} \le s_{i^*-1} \le s_p$. Isto é,

$$s_1 \le s_i \le s_p \le s_0 \,, \qquad \forall i \text{ impar } , \quad \forall p \text{ par.}$$

Logo, (s_{2n+1}) e (s_{2n}) são monótonas limitadas e, pelo Axioma 2.3, convergentes. Se $\alpha = \lim s_{2n+1}$ e $\beta = \lim s_{2n}$ temos, $\beta - \alpha = \lim[\, s_{2n} - s_{2n+1}\,] = \lim a_{2n+1} = 0$ e assim, $\exists \lim s_n = \alpha$.

Por último, seja m par ou ímpar, α está entre s_m e s_{m+1} e $|\alpha - s_m| \le |s_m - s_{m+1}| = a_{m+1}$ ∎

Exemplo 3.47 *A série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$, *converge absolutamente se* $\alpha > 1$ *e condicionalmente se* $0 < \alpha \le 1$.

Verificação: Claramente $\sin \frac{1}{n^\alpha} > 0$, se $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin \frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}} = 1$ e pelo Critério do Limite (3.21), $\sum^\infty \sin \frac{1}{n^\alpha} < \infty \Leftrightarrow \sum^\infty \frac{1}{n^\alpha} < \infty$. Logo (v. 3.12) a série dada converge absolutamente se e só se $\alpha > 1$.

Ainda, como $\sin' 0 = \cos 0 = 1 > 0$, $\theta \mapsto \sin\theta$ é crescente num intervalo centrado em 0 e $(\sin \frac{1}{n^\alpha}) \searrow 0$, se $\alpha > 0$. Pelo Critério de Leibnitz a série dada converge se $0 < \alpha \le 1$ ∎

Mostremos que a hipótese (a_n) decrescente é essencial no enunciado do Critério de Leibnitz.

Exemplo 3.48 *A série* $\sum^\infty (-1)^n a_n$, $a_n = \frac{1}{n}$ *se* n *é ímpar e* $a_n = \frac{1}{n!}$ *senão, diverge e* $\lim a_n = 0$.

Verificação: É óbvio que $\lim a_n = 0$. Já vimos no Teorema 2.57 que a série $\sum^\infty b_n$, $b_n = 0$ se n é ímpar e $b_n = \frac{1}{n!}$ senão, é convergente e portanto, se $\sum^\infty (-1)^n a_n$ for convergente então $\sum^\infty (-1)^n a_n - \sum^\infty b_n = \sum^\infty c_n$, $c_n = -\frac{1}{n}$ se n é ímpar e $c_n = 0$ senão, é também uma série convergente; o que é uma contradição pois $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ...$ diverge (vide resolução do Exemplo 3.15) ∎

Exemplo 3.49 *A série abaixo é condicionalmente convergente:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \ -1 < \alpha < 0 \ .$$

Verificação: Seja $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}$. Pelo Exemplo 3.38 temos $\sum^{+\infty} |a_n| = +\infty$.

Porém, sendo $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{n-\alpha}{n+1} < 1$, pois $-\alpha < 1$, temos que a sequência $(|a_n|)$ é decrescente e existe $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = L$. Mostremos que $L = 0$.

Fixando $n \in \mathbb{N}$ e escrevendo $\beta = 1 + \alpha$, de $-1 < \alpha < 0$ temos $0 < \beta < 1$ e, para $p \in \mathbb{N}$ arbitrário,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n-\alpha}{n+1} = \frac{n+1-(1+\alpha)}{n+1} = 1 - \frac{\beta}{n+1}\,,$$

$$\left|\frac{a_{n+p}}{a_n}\right| = \left|\frac{a_{n+p}}{a_{n+p-1}}\frac{a_{n+p-1}}{a_{n+p-2}} .... \frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(1 - \frac{\beta}{n+p}\right)\left(1 - \frac{\beta}{n+p-1}\right)....\left(1 - \frac{\beta}{n+1}\right),$$

$$(*) \qquad \left|\frac{a_{n+p}}{a_n}\right| \le \left(1 - \frac{\beta}{n+p}\right)^p \le \left(1 - \frac{\beta}{n+p}\right)^{p+n}\left(1 - \frac{\beta}{n+p}\right)^{-n} .$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\frac{a}{x})^x = e^a$, tomando em (*) o limite para $p \to +\infty$ obtemos $\frac{L}{a_n} \le e^{-\beta}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Desta forma temos, $0 \le e^{\beta}L \le \lim a_n = L$, o que implica $L = 0$ pois $e^{\beta} > 1$. Logo, pelo critério de Leibnitz, $\sum\limits^{+\infty}(-1)^n|a_n| = \sum\limits^{+\infty} a_n$ é convergente ■

3. 8 - Aproximação e Representação Decimal[13] de um Número Real

Um número real x da forma

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}\ ,$$

com a_0 um natural arbitrário e $a_1, a_2, ..., a_n$ naturais tais que $0 \le a_i \le 9$, é usualmente indicado em sua representação decimal finita $x = a_0, a_1a_2 \ldots a_n$ e é claro que $x \in \mathbb{Q}$. Porém, nem todos os racionais tem representação decimal finita. Por exemplo, se $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$, com $a, n \in \mathbb{N}$ então $3a = 10^n$ o que é impossssível pois 3 não divide 10.

Lema 3.50 *Dado $x \in \mathbb{R}$, é bem definido $[\![x]\!] := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \le x\} \in \mathbb{Z}$ e, ainda, $[\![x]\!] \le x < [\![x]\!] + 1$.*

Prova: Mostremos que $S = \{n \in \mathbb{Z} : n \le x\}$, obviamente limitado superiormente, é não vazio. Se $x \ge 0$ então $0 \in S$. Se $x \le 0$ então $-x \ge 0$ e, pelo Lema 2.5, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $p \ge -x$ e portanto $-p \le x$; donde, $-p \in S$. Seja $[\![x]\!] = \sup S$.

Pela Propriedade 2.4 existe $n \in \mathbb{S}$ tal que $[\![x]\!] - 1 < n \le [\![x]\!]$. Portanto, $n \le [\![x]\!] < n+1$ e então $n+1 > \sup S$, $n+1 \notin S$ e $x < n+1$. Logo, $S = \{\ldots, n-2\,, n-1\,, n\}$ e $n = \max S = \sup S = [\![x]\!]$ ■

O número $[\![x]\!]$ é o maior inteiro menor ou igual a x e $[\![\,.\,]\!] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ é a **função maior inteiro**.

Teorema 3.51 *Seja $x \ge 0$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe um decimal finito $r_n = a_0, a_1 \ldots a_n$ tal que*

$$r_n \le x < r_n + \frac{1}{10^n}\ .$$

Prova: Pelo Lema 3.50 é óbvio que $a_0 = [\![x]\!]$ é um inteiro positivo e,

$$a_0 \le x < a_0 + 1\ .$$

Consideremos $a_1 = [\![10(x-a_0)]\!]$. Como $0 \le 10(x-a_0) < 10$, segue que $0 \le a_1 \le 9$,

$$a_1 \le 10(x-a_0) < a_1 + 1 \quad \text{e} \quad a_0 + \frac{a_1}{10} \le x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}.$$

Analogamente, se $a_2 = [\![10^2(x - a_0 - \frac{a_1}{10})]\!]$ obtemos $0 \le a_2 \le 9$,

$$a_2 \le 10^2(x - a_0 - \frac{a_1}{10}) < a_2 + 1 \quad \text{e} \quad a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \le x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{1}{10^2}\ .$$

Procedendo por indução, obtemos o resultado desejado ■

[13] Em 1790, na França, com a nova ordem , foi criada uma comissão para a reforma dos pesos e medidas e em 1799 o sistema métrico como hoje o conhecemos e o sistema decimal foram adotados. Haviam proponentes do sistema duodecimal, A. M. Legendre (1752-1833) não foi apontado por não ser claramente pró-revolucionário (mediu o comprimento de um meridiano facilitando a adoção do metro e talvez para provocar os duodecimalistas tenha aventado o sistema de base onze) e Lagrange, a princípio , também não, por ser estrangeiro.

Corolário 3.52 *Com a notação acima, a sequência crescente* (r_n) *converge a* x.

Prova: É óbvio que (r_n) é crescente e, ainda, $0 \le x - r_n < \frac{1}{10^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ∎

Definição 3.53 *Se* $x \ge 0$ *e* $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ *são dados pelo Teorema 3.51,* $x = a_0, a_1 a_2 a_3 ....$ *é* **uma representação decimal infinita** *de* x.

A representação decimal infinita de $x > 0$ não é necessariamente única. Uma outra surge ao escolhermos a_0 o maior inteiro estritamente menor que x e trocarmos a desigualdade imposta no enunciado do Teorema 3.51 pela condição $r_n < x \le r_n + \frac{1}{10^n}$. Assim procedendo obtemos $1 = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + ... + \frac{9}{10^n} + ... = 0,999999...$, $\frac{1}{10^n} = \frac{9}{10^{n+1}} + \frac{9}{10^{n+1}} + ... + \frac{9}{10^{n+1}} + ... = 0,0....0999...$, com os $9's$ ocorrendo a partir da $(n+1)$-ésima casa decimal.

Desta forma, para $\frac{1}{8}$, por exemplo, temos as representações: $\frac{1}{8} = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{5}{10^3} = 0,125000...$ e $\frac{1}{8} = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \frac{9}{10^5} + ... = 0,124999....$

Proposição 3.54 *Os números* $x = \frac{m}{10^n} > 0$, $m, n \in \mathbb{N}$, *tem apenas duas representações decimais:*

(a) $a_0, a_1. ... . a_{p-1}. a_p.9.9.9....$, $a_p \ne 9$, *e* $a_0, a_1. ...a_{p-1}.(a_p + 1).0.0.0. ...$, *caso* $x \notin \mathbb{N}$.

(b) $a_0, 999...$ *e* $(a_0 + 1), 000...$, *caso* $x \in \mathbb{N}$.

Os demais números em $[0, +\infty)$ *tem representação única.*

Prova: Suponhamos duas representações distintas de $x \ge 0$,

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_n}{10^n} + ... = b_0 + \frac{b_1}{10} + ... + \frac{b_n}{10^n} + ... \ , \ 0 \le a_i, b_i \le 9 \, , i \in \mathbb{N} \ .$$

Seja $p = \min \{ i \in \mathbb{N} : a_i \ne b_i \}$. Caso $p \ge 1$, temos $a_i = b_i$ se $0 \le i \le p - 1$ e portanto,

$$\frac{a_p}{10^p} + \frac{a_{p+1}}{10^{p+1}} + ... + \frac{a_n}{10^n} + ... = \frac{b_p}{10^p} + \frac{b_{p+1}}{10^{p+1}} + ... + \frac{b_n}{10^n} + ... \ , \ a_p \ne b_p \ .$$

Admitamos, sem perda de generalidade, $b_p = a_p + k$, $k \ge 1$. Então,

$$\frac{a_{p+1}}{10^{p+1}} + ... + \frac{a_n}{10^n} + ... = \frac{k}{10^p} + \frac{b_{p+1}}{10^{p+1}} + ... + \frac{b_n}{10^n} + ... \ .$$

Na equação acima, o máximo no lado esquerdo ocorre se e só se $a_i = 9$, $\forall i \ge p + 1$ e é $\frac{1}{10^p}$ e o mínimo no lado direito ocorre se e só $k = 1$ (estamos supondo $k \ge 1$) e $b_i = 0$, $\forall i \ge p + 1$ e é $\frac{1}{10^p}$. Assim, como vale a igualdade, temos $b_p = a_p + 1$ e, para todo $i \ge p + 1$, $a_i = 9$ e $b_i = 0$ e

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_{p-1}}{10^{p-1}} + \frac{a_p}{10^p} + \frac{9}{10^{p+1}} + ... \frac{9}{10^n} + ... = b_0 + \frac{b_1}{10} + ... \frac{b_{p-1}}{10^{p-1}} + \frac{a_p + 1}{10^p} \ .$$

O caso $p = 0$ é análogo ∎

Apêndice 1 - Fórmulas de Taylor com Resto Integral e de Lagrange.

Integrando $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, com $\varphi^{(n+1)}$ integrável, sucessivamente por partes obtemos,

$$
\begin{aligned}
\varphi(1) - \varphi(0) &= \int_0^1 \varphi'(t)dt \\
&= \int_0^1 1.\varphi'(t)dt \quad \text{(substituamos } u' = 1 \text{ e } v = \varphi'\text{)} \\
&= t\varphi'(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 t\varphi''(t)dt \\
&= \varphi'(1) - \int_0^1 t\varphi''(t)dt \\
&= \varphi'(0) + \varphi'(1) - \varphi'(0) \; - \int_0^1 t\varphi''(t)dt \\
&= \varphi'(0) + \int_0^1 \varphi''(t)dt - \int_0^1 t\varphi''(t)dt \\
&= \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)dt \quad \text{(pomos } u' = 1-t \text{ e } v = \varphi''\text{)} \\
&= \varphi'(0) \; - \; \tfrac{(1-t)^2}{2}\varphi''(t)\Big|_0^1 \; + \; \int_0^1 \tfrac{(1-t)^2}{2}\varphi''(t)dt \\
&= \varphi'(0) + \tfrac{\varphi''(0)}{2} + \int_0^1 \tfrac{(1-t)^2}{2}\varphi''(t)dt \quad \text{(pomos } u' = \tfrac{(1-t)^2}{2} \text{ e } v = \varphi'''\text{)} \\
&= \varphi^{(1)}(0) + \tfrac{\varphi^{(2)}(0)}{2} \; - \; \tfrac{(1-t)^3}{6}\varphi^{(3)}(t)\Big|_0^1 \; + \; \int_0^1 \tfrac{(1-t)^3}{6}\varphi^{(4)}(t)dt = \\
&= \varphi^{(1)}(0) + \tfrac{\varphi^{(2)}(0)}{2!} + \tfrac{\varphi^{(3)}(0)}{3!} \; + \; \int_0^1 \tfrac{(1-t)^3}{3!}\varphi^{(4)}(t)dt = \\
&\;. \\
&\;. \\
&= \varphi^{(1)}(0) + \tfrac{\varphi^{(2)}(0)}{2!} + \tfrac{\varphi^{(3)}(0)}{3!} \; + \; ... \; + \; \tfrac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} \; + \; \int_0^1 \tfrac{\varphi^{(n+1)}(t)}{n!}(1-t)^n dt \; .
\end{aligned}
$$

Teorema (Fórmula de Taylor com resto integral) Suponhamos $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ tal que $f^{(n+1)}$ é integrável. Dados $x_0, x \in (a,b)$ existe ξ entre x_0 e x, com $\xi \neq x_0$ e $\xi \neq x$, tal que

$$f(x) = f(x_0)+f^{(1)}(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+....+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \; .$$

Prova: Seja $\varphi(t) = f\big(x_0 + t(x-x_0)\big)$, $t \in [0,1]$. Então,

$$
\begin{cases}
\varphi(0) = f(x_0) \\
\varphi(1) = f(x) \\
\varphi'(t) = f'\big(x_0 + t(x-x_0)\big)(x-x_0) \\
\varphi''(t) = f''\big(x_0 + t(x-x_0)\big)(x-x_0)^2 \\
. \\
. \\
\varphi^{(k)}(t) = f^{(k)}\big(x_0 + t(x-x_0)\big)(x-x_0)^k \, , \quad 1 \leq k \leq n+1 \, , \\
\varphi^{(k)}(0) = f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k \, , \quad 1 \leq k \leq n+1 \; ,
\end{cases}
$$

$$\int_0^1 \frac{\varphi^{(n+1)}(t)}{n!}(1-t)^n dt \; = \; \int_0^1 \frac{f^{(n+1)}\big(x_0 + t(x-x_0)\big)(x-x_0)^{n+1}}{n!}(1-t)^n \, dt \; =$$

$\Big[$com a mudança linear de variável $y = x_0 + t(x-x_0)$, $dy = (x-x_0)dt$ e $t = \frac{y-x_0}{x-x_0}\Big]$

$$= \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(y)(x-x_0)^{n+1}}{n!}\Big(1 - \frac{y-x_0}{x-x_0}\Big)^n \frac{dy}{x-x_0}$$

$$= \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n dy \quad \blacksquare$$

Chamamos $P_{n;x_0}(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$ de **polinômio de Taylor de ordem n de f, no ponto x_0**, e $R_{n;x_0}(x) = f(x) - P_{n;x_0}(x)$ de **resto**.

A expressão $R_{n;x_0} = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$ é a **forma integral do resto**.

O resultado abaixo generaliza o Teorema do Valor Médio (TVM). Seja $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$.

Teorema (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange) Seja $f : I \to \mathbb{R}$ tal que existe $f^{(n+1)}$, $\mathbb{N} \ni n$ fixo. Dados $x_0, x \in I$, com $x \neq x_0$, existe ξ entre x_0 e x, $\xi \neq x_0$ e $\xi \neq x$, tal que

$$f(x) = f(x_0) + \ f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \ + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \xi = \xi(x) \ .$$

Prova: Pelo TVM existe ξ_1 entre x e x_0, $\xi_1 \neq x_0$, $\xi_1 \neq x$, com $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi_1)$ e,

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi_1)(x-x_0) \ .$$

Seja $\eta \in \mathbb{R}$ determinado pela equação $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) = \eta(x-x_0)^2$. Então,

$$\varphi(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \eta(x-t)^2 \text{ satisfaz } \ \varphi(x_0) = 0 = \varphi(x) \ .$$

Logo, existe ξ_2 entre x_0 e x, $\xi_2 \neq x_0$ e $\xi_2 \neq x$, tal que $0 = \varphi'(\xi_2)$. Porém,

$$\varphi'(t) = -f'(t) - f''(t)(x-t) + f'(t) + 2\eta(x-t) = \big[2\eta - f''(t)\big](x-t),$$

e avaliando tal identidade em ξ_2 obtemos $2\eta - f''(\xi_2) = 0$ e $\eta = \frac{f''(\xi_2)}{2!}$ e

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(x-x_0)^2 \ .$$

De forma análoga, determinando λ pela equação

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \lambda(x-x_0)^{n+1} \ ,$$

definimos a função derivável ψ,

$$\psi(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 \ldots - \frac{f^n(t)}{n!}(x-t)^n - \lambda(x-t)^{n+1}\,; \ \ \psi(x_0) = 0 = \psi(x),$$

cuja derivada é a soma abaixo, em que cada segundo termo entre colchetes cancela com o primeiro termo entre os dois colchetes imediatamente anteriores,

$$\begin{aligned}
\psi'(t) \ &= \big[-f'(t)\big] + \big[-f''(t)(x-t) + f'(t)\big] + \Big[-\tfrac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2 + f''(t)(x-t)\Big] \ldots\ldots + \\
&+ \ldots + \Big[-\tfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \tfrac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\Big] + \lambda(n+1)(x-t)^n = \\
&= -\tfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \lambda(n+1)(x-t)^n \ .
\end{aligned}$$

Uma vez mais, existe ξ entre x_0 e x, $\xi \neq x_0$ e $\xi \neq x$, tal que $\psi'(\xi) = 0$ e portanto,

$$\lambda(n+1)(x-\xi)^n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \Longrightarrow \lambda = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad \blacksquare$$

A expressão $R_{n;x_0} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ é a **forma de Lagrange do resto**.

Apêndice 2 - Segunda Prova da Comparação entre os Testes da Razão e da Raíz

Abaixo, uma forma mais fraca do Teorema 3.28 evitando o uso de $\limsup$ ou de $\liminf$.

Proposição Se $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L \in [0,+\infty]$ então $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$.

Prova: Se $L < \infty$ e $\epsilon > 0$, seja $0 < \delta < \epsilon$ e n_0 tal que, se $n \geq n_0$, $L - \delta < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < L + \delta$. Logo,

$$(L-\delta)^{n-n_0}|a_{n_0}| \leq |a_n| = \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}\frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|}\cdots\cdots\frac{|a_{n_0+1}|}{|a_{n_0}|}|a_{n_0}| \leq (L+\delta)^{n-n_0}|a_{n_0}|$$

e, ainda para $n > n_0$,

$$\frac{(L-\delta)^n}{(L-\delta)^{n_0}} \leq \frac{|a_n|}{|a_{n_0}|} \leq \frac{(L+\delta)^n}{(L+\delta)^{n_0}} .$$

Sendo $L - \delta < L < L + \delta$ temos (omitimos o caso $L = 0$, que é similar)

$$\frac{(L-\delta)^n}{L^{n_0}} \leq \frac{|a_n|}{|a_{n_0}|} \leq \frac{(L+\delta)^n}{L^{n_0}},$$

e, definindo $\alpha = \frac{|a_{n_0}|}{L^{n_0}}$,

$$\sqrt[n]{\alpha}(L-\delta) \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{\alpha}(L+\delta)\,, \quad \forall n > n_0.$$

Como $\frac{L-\epsilon}{L-\delta} < 1 < \frac{L+\epsilon}{L+\delta}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$, fixamos $N > n_0$ tal que, se $n > N$, $\frac{L-\epsilon}{L-\delta} < \sqrt[n]{\alpha} < \frac{L+\epsilon}{L+\delta}$ e concluímos este caso observando,

$$(L-\epsilon) < \sqrt[n]{\alpha}(L-\delta) \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{\alpha}(L+\delta) < (L+\epsilon),\ \forall\ n > N \ .$$

O caso $L = +\infty$ é redutível ao caso $L = 0$ aplicando este à sequência $(\frac{1}{a_n})$ ∎

Capítulo 4

SÉRIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES E SOMAS

4.1 - Introdução

O conceito de convergência de uma série já havia sido utilizado algumas vezes por Euler (no século XVI também foi utilizado, entre outros, o de que o termo geral tende a zero) e muitos matemáticos haviam operado livremente com séries divergentes e Euler tentara formalizar o estudo destas séries . Com Cauchy e sua insistência em que as séries divergentes não possuem soma, e o sucesso de Çours d'Analyse (1821), a definição atual se estabeleceu.

Em 1833, Cauchy notou que uma série de termos reais não todos positivos poderia ter uma sub-série divergente e Dirichlet (1837) apresentou os rearranjos da série harmônica alternada: $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ e $\frac{3}{2}\log 2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots$ e provou o teorema do rearranjo para séries absolutamente convergentes de números reais (ie., a convergência é comutativa).

Em 1854, Riemann escreveu (em seu "Habilitationsschrift") que "já em 1829, Dirichlet sabia que as séries infinitas caem em duas classes essencialmente diferentes, conforme permanecem convergentes ou não após seus termos terem sido feitos positivos. Em séries do primeiro tipo os termos podem ser arbitrariamente permutados; em constraste, o valor de uma série do segundo tipo depende da ordem de seus termos" e prova seu teorema do rearranjo: Uma série convergente (de termos reais) que não é absolutamente convergente pode convergir a um arbitrário dado valor real C após uma apropriada reordenação de seus termos.

Com o conceito de **somabilidade**, para efetuarmos a **soma de uma família** $(a_j)_{j\in J} \subset \mathbb{K}$, de números reais ou complexos, diferentemente do conceito de séries desconsideramos a ordem dos elementos e veremos que para sequências, somabilidade e convergência absoluta são conceitos equivalentes. A somabilidade proporciona um melhor entendimento da convergência absoluta, permitindo (e isto é importante) generalizar a propriedade associativa para séries e simplificando a aplicação dos teoremas de convergência para séries duplas e produto de séries absolutamente convergentes. Além disso, tal conceito é importante em análise mais avançada.

4.2 - Somas de Sequências, Convergência Absoluta e Comutatividade

Definição 4.1 *A série* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *é* **comutativamente convergente** *se todo* **rearranjo** *(***reordenação***) seu,* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_{\sigma(n)}$*,* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *bijetora, converge (a um mesmo número).*

Exemplo 4.2 *(Dirichlet, 1837)* **A série** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ **não é comutativamente convergente**.

Verificação: Já vimos, no Exemplo 3.14, que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2 = s$. Então,

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}.......... ,$$

$$\frac{s}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{(-1)^n}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + ...,$$

e reescrevendo esta última como (é fácil ver que podemos),

$$\frac{s}{2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + ... ,$$

e somando as séries para s e $\frac{s}{2}$ obtemos,

$$\frac{3s}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + ... ,$$

um rearranjo da série inicial com valor diferente. Observemos que escrevendo $s = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ e $\frac{s}{2}$ na forma $\frac{s}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, $b_n = 0$, se n é ímpar e, $b_n = -\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n}$, se n é par, temos que $s + \frac{s}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n$, $c_n = \frac{1}{n}$, se n é ímpar e, para n par, $c_n = 0$, se $\frac{n}{2}$ é ímpar e $c_n = -\frac{1}{\frac{n}{2}}$ se $\frac{n}{2}$ é par. A série encontrada para $\frac{3s}{2}$, com valores nulos ausentes, corresponde a $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$, que os apresenta ∎

Um exemplo como acima, em $\mathbb{R}$, só poderia ocorrrer com uma série alternada pois, felizmente e como não poderia deixar de ser e mostramos abaixo, todos os rearranjos de uma série de termos positivos tem um mesmo limite (isto é, o limite da sequência das somas parciais) em $[0, +\infty]$. Se este é $+\infty$ diremos brevemente que a série **diverge comutativamente** $+\infty$.

Observação 4.3 *Para uma série* $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$*,* $p_n \geq 0$*, convergente ou não, temos* $\lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n$*.*

Abaixo mostramos uma forma de estimarmos o valor de uma série de termos positivos independentemente da ordem de seus termos, o que será útil para definirmos somas de sequências.

Teorema 4.4 (Convergência e Comutatividade) *Seja* $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$ *uma série em* $\mathbb{R}^+$*. Temos,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = \rho, \quad com\ \rho = sup\{ \sum_{n\in F} p_n : F \subset \mathbb{N}\ e\ F\ finito \} \in [0, +\infty] .$$

Se $\rho < \infty$*,* $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$ *é comutativamente convergente e, se* $\rho = +\infty$*, comutativa/e divergente a* $+\infty$*.*

Prova: Notemos que, valendo a igualdade enunciada, como o supremo ρ independe do rearranjo da série, se $\rho < \infty$ a convergência é comutativa e, se $\rho = +\infty$, a divergência é comutativa.

Seja (s_m) a sequência (crescente) das somas parciais da série dada e $F \subset \mathbb{N}$, F finito e arbitrário. Pelas desigualdades,

$$\sum_{m\in F} p_m \le s_{\max(F)} \le \sum_{n=1}^{+\infty} p_n \ , \qquad s_m = \sum_{k\in\{1,\dots,m\}} p_k \le \rho \, ,$$

é imediato que $\rho = \sup\{\sum_{m\in F} p_m : F \subset \mathbb{N}$ e F finito$\} \le \sum_{n=1}^{+\infty} p_n$ e $\lim_{m\to+\infty} s_m = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n \le \alpha$ ■

Comentário: Como já dito, a demonstração acima sugere o conceito de sequência somável. A comutatividade para séries de termos positivos é só uma das afirmações do Teorema 4.3 e mostramos abaixo uma outra importante prova, bem mais simples, desta afirmação.

Consideremos uma série real $\sum^{+\infty} p_n$, de termos $p_n \ge 0$, $\forall n$, e um seu rearranjo $\sum^{+\infty} p_{\sigma(n)}$, onde $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma bijeção arbitrária. Da desigualdade

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \le \sum_{n=1}^{+\infty} p_{\sigma(n)} \, , \forall n \in \mathbb{N} \, ,$$

tomando o limite para $n \to +\infty$ obtemos, $\sum^{+\infty} p_n \le \sum^{+\infty} p_{\sigma(n)}$. Mutatis mutandis, $\sum^{+\infty} p_{\sigma(n)} \le \sum^{+\infty} p_n$.

Definição 4.5 Somabilidade.

(a) A **sequência** (x_n) *é* **somável,** *com* **soma** $x \in \mathbb{K}$*, se* $\forall \epsilon > 0$, $\exists F_\epsilon \subset \mathbb{N}$, F_ϵ *finito, tal que,*

$$\left| \sum_{n\in F} x_n \ - x \right| \ < \ \epsilon, \ \forall \ F \supset F_\epsilon \ , F \subset \mathbb{N} \ e \ F \ finito \ .$$

(b) **Uma família** *em* $\mathbb{K}$ *é uma função* $x : I \to \mathbb{K}$, I *um conjunto de índices, que notamos* $(x_i)_I$, $x_i = x(i)$, $\forall i$. *Trocando* $\mathbb{N}$ *por* I*, em (a), temos a definição de* **família somável**.

Evidentemente, toda sequência é uma família. Nestas notas I é sempre enumerável.

Observação 4.6 *Se* $\sigma : J \to I$ *é uma bijeção então* $(x_i)_I$ *é somável se e só se* $(x_{\sigma j})_J$ *é somável.*

Notação 4.7 *Se a família* $(x_i)_I$ *é somável, indicamos por* $\sum_{i\in I} x_i$*, ou* $\sum_I x_i$*, a soma da família. Se* $I = \mathbb{N}$*, além de* $\sum_{\mathbb{N}} x_n$ *e* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$*, também escrevemos* $\sum x_n$ *para a soma da sequência.*

Frisarmos que a notação para séries, $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, indica que estamos somando os termos da série ordenadamente: desde o primeiro, $_1$, e "ad infinitum". A notação $\sum_{\mathbb{N}} x_n$ para somas já indica que estamos usando $\mathbb{N}$ apenas como conjunto, sem relevância das propriedades de sua ordem.

Proposição 4.8 *Se* $(z_n) \subset \mathbb{C}$ *é somável,* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ *converge comutativamente e* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{\mathbb{N}} z_n$.

Prova Dado $\epsilon > 0$ seja $F_\epsilon \subset \mathbb{N}$ como na definição de somabilidade, $z = \sum_{\mathbb{N}} z_n$ e (s_n) a sequência das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$. Escolhendo $N \in \mathbb{N}$ tal que $F_\epsilon \subset \{1, 2, ..., N\}$ temos, para $m \ge N$, $F_m = \{1, ..., m\} \supset F_\epsilon$ e $|s_m - z| = |\sum_{F_m} z_n - z| < \epsilon$. Logo, $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = z$ e, como a **soma da sequência** (z_n) independe, é óbvio, da ordem adotada, segue a tese ■

Enfatizemos que segundo a Definição 3.2, se $x = \sum^{+\infty} x_n$ então x é a **soma da série**.

Corolário 4.9 *A série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$, *em* $[0,+\infty)$, *converge [comutativa/e] se, e só se,* (p_n) *é somável. Ocorrendo um destes casos temos,* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n = \sum\limits_{\mathbb{N}} p_n = \sum p_n$.

Prova:

($\Rightarrow$) Segue trivialmente do Teorema 4.4 e da Definição 4.5 acima.

($\Leftarrow$) Consequência imediata da Proposição 4.8 ■

Para uma série divergente, $\sum^{+\infty} p_n$, $p_n \geq 0$, $\forall n$, indicamos $\sum p_n = +\infty$. Então, pelo Teor. 4.4, Prop. 4.8 e Corol 4.9, para toda série de termo geral $p_n \geq 0$ (convergente ou divergente) vale:

$$\sum p_n = \sup\Big\{ \sum_{n\in F} p_n : F \subset \mathbb{N} \ \text{ e } F \text{ é finito } \Big\} = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n \ .$$

Assim, para séries de termos positivos usaremos livremente a notação $\sum p_n$ pois não há risco de dubiedade se a interpretarmos como uma **série** ou como uma **soma**.

Proposição 4.10 *As sequências somáveis em* $\mathbb{K}$ *formam um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial com as operações,* $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$ *e* $\lambda(x_n) = (\lambda x_n)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. *Ainda mais, se* $\sum\limits_{\mathbb{N}} x_n = x$ *e* $\sum\limits_{\mathbb{N}} y_n = y$ *então,*

(a) $\sum\limits_{\mathbb{N}}(x_n + y_n) = \sum\limits_{\mathbb{N}} x_n + \sum\limits_{\mathbb{N}} y_n$.

(b) $\sum\limits_{\mathbb{N}} \lambda x_n = \lambda \sum\limits_{\mathbb{N}} x_n$.

Prova: Suponhamos $\sum x_n = x$ e $\sum y_n = y$, com x e y em $\mathbb{K}$ e seja $\epsilon > 0$ arbitrário.

(a) Por hipótese, $\exists F_1\,, F_2 \subset \mathbb{N}$, F_1 e F_2 finitos, tais que $|\sum\limits_{n\in F} x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall F \subset \mathbb{N}$ tal que $F \supset F_1$ e F é finito; e, analogamente, $|\sum\limits_{n\in F} y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall F \subset \mathbb{N}$ tal que $F \supset F_2$ e F é finito.

Então, escolhendo $F_3 = F_1 \bigcup F_2$ temos $F_3 \subset \mathbb{N}$, F_3 é finito e, para $F \subset \mathbb{N}$ satisfazendo $F \supset F_3 = F_1 \bigcup F_2$ e F finito temos que $F \supset F_1$ e $F \supset F_2$ e, pela desigualdade triangular,

$$\Big|\sum_{n\in F}(x_n + y_n) - (x+y)\Big| \ \leq \ \Big|\sum_{n\in F} x_n - x\Big| \ + \ \Big|\sum_{n\in F} y_n - y\Big| \ < \ \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \ .$$

(b) O caso $\lambda = 0$ é óbvio. Se $\lambda \neq 0$, Por hipótese, existe $F_1 \subset \mathbb{N}$, F_1 finito, tal que $|\sum\limits_{n\in F} x_n - x| < \frac{\epsilon}{|\lambda|}$ se $F \supset F_1$ e F é finito. Então,

$$\Big|\sum_{n\in F} \lambda x_n - \lambda x\Big| = |\lambda|\Big|\sum_{n\in F} x_n - x\Big| < |\lambda|\frac{\epsilon}{|\lambda|} = \epsilon \quad ■$$

A Proposição 4.10 se estende trivialmente a famílias somáveis indexadas em um conjunto fixo qualquer de índices I (solicitamos, e estimulamos, ao leitor verificar). É fácil ver que $(z_n) \subset \mathbb{C}$ é somável se e só se $\big(\mathrm{Re}(z_n)\big)$ e $\big(\mathrm{Im}(z_n)\big)$ são somáveis e, neste caso, $\sum\limits_{\mathbb{N}} z_n = \sum\limits_{\mathbb{N}} \mathrm{Re}(z_n) + i \sum\limits_{\mathbb{N}} \mathrm{Im}(z_n)$.

Definição 4.11 *Dada* $\sum\limits^{+\infty} a_n$ *em* $\mathbb{R}$, p_n **, a parte positiva de** a_n*, é dada por* $p_n = a_n$ *se* $a_n \geq 0$ *e* $p_n = 0$ *se* $a_n \leq 0$*. A* **parte negativa** *de* a_n*, é* $q_n = -a_n$ *se* $a_n \leq 0$ *e,* $q_n = 0$ *se* $a_n \geq 0$*. Temos,*

$$a_n = p_n - q_n\ ,\ \ |a_n| = p_n + q_n\ ,\ \ p_n \geq 0\ ,\ \ q_n \geq 0\ , \forall\, n \in \mathbb{N}\ .$$

Mantendo a notação da Definição 4.11 investigamos abaixo as convergências absoluta, comutativa e condiconal de uma série de termo geral $a_n \in \mathbb{R}$ analisando as séries determinadas pelas sequências (p_n) e (q_n). No item (b), provamos um importante teorema de Dirichlet sobre séries absolutamente convergentes e no item (d) nos baseamos na prova do Teorema de Riemann.

Lema 4.12 *Seja* $\sum\limits^{+\infty} a_n$ *uma série em* $\mathbb{R}$*. Então,*

(a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n$*, sejam tais séries convergentes ou divergentes (a* $+\infty$*).*

(b) [1]*Se a série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge absolutamente então ela é comutativamente convergente (seus rearranjos tem mesma soma), as séries geradas pelas sequências* p_n *e* q_n *convergem e,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n - \sum_{n=1}^{+\infty} q_n.$$

(c) A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge condicionalmente se, e só se,* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n = +\infty$*.*

(d) [2] *Se* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge condicionalmente, existe um rearranjo não convergente de* $\sum\limits^{+\infty} a_n$*.*

Prova:

(a) Pelo Cor. 3.3 e Obs. 4.4, basta tomar o limite, para $m \to +\infty$, de $\sum\limits_{n=1}^{m} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{m} p_n + \sum\limits_{n=1}^{m} q_n$.

(b) Como $0 \leq p_n\,, q_n \leq |a_n|$, $\sum\limits^{+\infty} p_n$ e $\sum\limits^{+\infty} q_n$ são séries em $[0, +\infty)$ e convergentes e, pelo Teor. 4.3, comutativamente convergentes. Logo, é claro que a diferença $\sum\limits^{+\infty} p_n - \sum\limits^{+\infty} q_n = \sum\limits^{+\infty} a_n$ é também uma série comutativamente convergente [de fato, supondo que $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é bijetora temos, $\sum\limits^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum\limits^{+\infty} p_{\sigma(n)} - \sum\limits^{+\infty} q_{\sigma(n)} = \sum\limits^{+\infty} p_n - \sum\limits^{+\infty} q_n = \sum\limits^{+\infty} a_n$.]

(c) Como $\sum\limits^{+\infty} a_n$ converge, de $a_n = p_n - q_n$ concluímos que $\sum\limits^{+\infty} p_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum\limits^{+\infty} q_n$ converge. Porém, de $\sum\limits^{+\infty} |a_n| = +\infty$ vemos por (a) que ao menos uma, entre $\sum\limits^{+\infty} p_n$ e $\sum\limits^{+\infty} q_n$, diverge. Logo, as duas últimas séries citadas divergem.

(d) Por (c) temos $\sum\limits^{+\infty} p_n = \sum\limits^{+\infty} q_n = +\infty$ e reordenamos a série da seguinte forma: na etapa 1, coletamos os primeiros termos, $a_n \geq 0$, com soma > 1; na etapa 2, os primeiros termos negativos cuja soma com os anteriores é < 0, na etapa 3, subtraidos de $\mathbb{N}$ os já escolhidos, coletamos os próximos termos positivos cuja soma com os anteriores é > 1. Por indução, o rearranjo obtido é tal que a sequência (t_n) de suas somas parciais, admite subsequência (t_{n_k}) com $t_{n_k} > 1, \forall k$, e uma outra de termos negativos e portanto, (t_n) diverge ∎

[1]Teorema de Dirichlet, 1837.

[2]A argumentação na prova deste resultado é proveniente da famosa demonstração do Teorema de Riemann.

Corolário 4.13 *Consideremos* $\sum^{+\infty} a_n$ *em* $\mathbb{R}$*. São equivalentes,*

(a) A série $\sum^{+\infty} a_n$ *e todos os seus rearranjos são convergentes.*

(b) A série $\sum^{+\infty} a_n$ *é absolutamente convergente.*

(c) A série $\sum^{+\infty} a_n$ *é comutativamente convergente (seus rearranjos tem uma mesma soma).*

Prova:

(a) $\Rightarrow$(b) Pelo Lema 4.12 (d), a série $\sum^{+\infty} a_n$, convergente por hipótese, não é condicionalmente convergente e portanto temos, $\sum^{+\infty} |a_n| < \infty$.

(b) $\Rightarrow$(c) Esta é uma das afirmações do Lema 4.12 (b).

(c) $\Rightarrow$(a) Óbvio ■

Neste segundo lema relacionamos convergência absoluta e somabilidade para séries em $\mathbb{R}$.

Lema 4.14 *Seja* $\sum^{+\infty} a_n$ *uma série em* $\mathbb{R}$*. Então,*

(a) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge absolutamente se, e só se,* (p_n) *e* (q_n) *são somáveis e,*

(b) se $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < \infty$ *então* (a_n) *é somável e*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum p_n - \sum q_n = \sum_{\mathbb{N}} a_n \ .$$

Prova:

(a) Pelo Lema 4.12 (a), $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge absolutamente se, e só se, as séries $\sum^{+\infty} p_n$ e $\sum^{+\infty} q_n$ são convergentes, o que ocorre, pelo Corolário 4.9, se e só se (p_n) e (q_n) são somáveis.

(b) Pelo Lema 4.12(b) as séries de termo geral p_n e q_n são convergentes e $\sum^{+\infty} a_n = \sum^{+\infty} p_n - \sum^{+\infty} q_n$. Pelo item (a) e pela Proposição 4.10 temos, $(a_n) = (p_n) - (q_n)$ é somável e $\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$. Ainda, pelo Corolário 4.9 temos $\sum p_n = \sum^{+\infty} p_n$ e $\sum q_n = \sum^{+\infty} q_n$. A conclusão é óbvia ■

Dada $(z_n) \subset \mathbb{C}$ é óbvio que $\sum^{+\infty} z_n$ é comutativa/e convergente se e só se $\sum^{+\infty} \mathrm{Re}(z_n)$ e $\sum^{+\infty} \mathrm{Im}(z_n)$ também o são e, é fácil ver que (z_n) é somável se e só se $(\mathrm{Re}(z_n))$ e $(\mathrm{Im}(z_n))$ são somáveis.

Teorema 4.15 *Em* $\mathbb{K}$*, se* $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < \infty$*, ou* $\sum |a_n| < \infty$*, então* (a_n) *é somável. Isto é,* $\sum_{\mathbb{N}} a_n < \infty$*.*

Prova: Pelo Lema 4.14 (b), resta apenas mostrar o caso complexo.

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n| < \infty$, como $|\mathrm{Re}(z_n)| \le |z_n|$ e $|\mathrm{Im}(z_n)| \le |z_n|$, segue que $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Re}(z_n)$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Im}(z_n)$ convergem absolutamente. Logo, pelo Lema 4.14 (b), $(\mathrm{Re} z_n)$ e $(\mathrm{Im} z_n)$ são somáveis e consequentemente, pela Proposição 4.10, $(z_n) = (\mathrm{Re} z_n) + i(\mathrm{Im} z_n)$ também ■

Teorema 4.16 *Dada a sequência* (z_n) *em* $\mathbb{K}$*, são equivalentes :*

(a) A sequência (z_n) *é somável e* $\sum\limits_{\mathbb{N}} z_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n$*.*

(b) A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *é absolutamente convergente (ou* $\sum |z_n| < \infty$*).*

(c) A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *é comutativamente convergente.*

Prova: No Teorema 4.15 mostramos $(b) \Rightarrow (a)$. Na Proposição 4.8 provamos $(a) \Rightarrow (c)$. (c) $\Rightarrow$ (b): Se $\sum\limits^{\infty} z_n$ é comutativamente convergente então $\sum\limits^{+\infty} \mathrm{Re}(z_n)$ e $\sum\limits^{+\infty} \mathrm{Im}(z_n)$ são comutativamente convergentes e, pelo Lema 4.12 (d), absolutamente convergentes ∎

4.3 - Associatividade para Séries e para Somas de uma Sequência

Dada uma série $\sum\limits^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ...$ com sequência das somas parciais (s_n) a inserção de parenteses, ainda que infinitos, gera uma série $\sum\limits^{+\infty} b_n$ cuja sequência das somas parciais (t_n) é, evidentemente, subsequência de (s_n). Assim, a inserção de parenteses não altera a soma de uma série convergente; mas, se esta é divergente, pode até mesmo resultar em uma série convergente, como é o caso com a série $1-1+1-1+1-1+1....$ que após inserirmos determinados parenteses torna-se a série $(1-1)+(1-1)+(1-1)+....$, fato que, como é fácil perceber, se refletirá na dissociatividade de uma série, a ser estudada no apêndice 2.

Para uma sequência (x_n), real e somável, provamos que $\sum |x_n| < \infty$ e desta forma, escrevendo $\sum x_n = \sum p_n - \sum q_n$, p_n e q_n as partes positivas e negativas de x_n, veremos que podemos associar as somas $\sum p_n$ e $\sum q_n$, de termos todos positivos, de forma totalmente arbitrária e assim também com $\sum a_n$. Por exemplo, para séries não é em geral correto escrevermos $\sum\limits^{+\infty} a_n = \sum\limits^{+\infty} a_{2n} + \sum\limits^{+\infty} a_{2n+1}$; já para somas efetivamente temos $\sum\limits_{\mathbb{N}} a_n = \sum\limits_{2\mathbb{N}} a_n + \sum\limits_{2\mathbb{N}+1} a_n$. O caso (z_n) complexo é facilmente redutível ao caso real. Portanto, tendo em vista que já provamos que as séries absolutamente convergentes são comutativamente convergentes, ganhamos uma enorme liberdade para lidarmos com tais séries ao aplicarmos a elas o conceito de associatividade para famílias somáveis, ao invés da um tanto restrita associatividade para séries. As séries absolutamente convergentes já foram interpretadas pelo matemático uruguaio J. L. Massera (1915-2002) como "séries de borracha" e, inspirados em tal comentário, modestamente adicionariamos "acrobáticas".

Definição 4.17 *Seja* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *estritamente crescente e,* $\sum\limits^{+\infty} a_n$ *e* $\sum\limits^{+\infty} b_n$ *relacionadas por:*

$$b_1 = a_1 + a_2 + ... + a_{\sigma(1)} \ , ..., b_{n+1} = a_{\sigma(n)+1} + a_{\sigma(n)+2} + ... + a_{\sigma(n+1)} \ , \ n = 1, 2, ... \ .$$

A série $\sum\limits^{+\infty} b_n$ *é obtida de* $\sum\limits^{+\infty} a_n$ *por* **associação** *e a série* $\sum\limits^{+\infty} a_n$ *de* $\sum\limits^{+\infty} b_n$ *por* **dissociação**.

Proposição 4.18 (Lei Associativa Para Séries) *Se* $\sum\limits^{+\infty} b_n$ *é associação de* $\sum\limits^{+\infty} a_n = a \in \mathbb{C}$ *então,* $\sum\limits^{+\infty} b_n = a$.

Prova: Mantendo a notação $s_n = a_1 + ... + a_n$ e $t_n = b_1 + ... + b_n = s_{\sigma(n)}$ temos,

$$\lim t_n = \lim s_{\sigma(n)} = \lim s_n \ \blacksquare$$

Corolário 4.19 *Seja* $\sum^{+\infty} a_n$ *uma série em* $\mathbb{K}$ *e absolutamente convergente. Seja* $\mathbb{N} = \bigcup F_i$*,* F_i *finito,* $\forall i \in \mathbb{N}$*, e* $F_i \cap F_j = \varnothing$*, se* $i \neq j$*, uma partição de* $\mathbb{N}$ *por conjuntos finitos. Temos,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{i=1}^{+\infty} u_i \quad ; \quad se \quad u_i = \sum_{n \in F_i} a_n \, , \forall \, i \, \in I \ .$$

Prova:

Segue da comutatividade de $\sum^{+\infty} a_n$, Teorema 4.16(c), listando, sucessivamente, na etapa $i = 1, 2, ...$ os termos a_n com $n \in F_i$ e então agrupando-os pela associatividade acima provada ∎

A associatividade para somas se dá mesmo dividindo $\mathbb{N}$ em infinitos subconjuntos infinitos. Por exemplo, listando os primos: $I = \{2, 3, 5, 7, ...\}$, em ordem crescente, e definindo F_2: os naturais múltiplos de 2; F_3: os múltiplos de 3 mas não de 2; F_5: os múltipos de 5 mas não de 2 ou 3, ... temos, $\mathbb{N} = \bigcup_I F_p$ e $F_p \cap F_q = \varnothing$ se $p \neq q$.

Lema 4.20 (Lei Associativa Para Somas de Termos Positivos) *Seja* $\sum_{\mathbb{N}} p_n$*,* $p_n \geq 0$*, somável. Suponhamos* $\mathbb{N} = \biguplus_I J_i$[3]*, uma partição de* $\mathbb{N}$*,* $I \subset \mathbb{N}$ *um conjunto de índices e* $J_i \neq \varnothing$*,* $\forall i$*. Então, a família* $(p_n)_{n \in J_i}$ *é somável,* $\forall i \in I$*, e ainda,* $(\sum_{n \in J_i} p_n)_I$ *é também somável e*

$$\sum p_n = \sum_{i \in I} \sum_{n \in J_i} p_n.$$

Prova: Fixado $i \in I$ temos $\sup\{\sum_{n \in F \subset J_i} p_n : F \subset J_i, F \text{ finito}\} \leq \sum p_n$. Logo, $(p_n)_{n \in J_i}$ é somável.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um único $i \in I$ com $n \in J_i$ e indicamos $p_n = p_n^i$.

Dado $F \subset \mathbb{N}$, F finito, existem $\{i_1, ..., i_k\}$ tais que $F \subset \{J_{i_1}, ..., J_{i_k}\}$. Consequentemente, $\sum_{n \in F} p_n \leq \sum_{J_{i_1}} p_n^{i_1} + ... + \sum_{J_{i_k}} p_n^{i_k} \leq \sum_{i \in I} \sum_{J_i} p_n^i$ e portanto, pela definição de supremo,

$$\sum p_n = sup\{\sum_{n \in F} p_n \, : F finito\} \ \leq \ \sum_{i \in I} \sum_{n \in J_i} p_n^i \ .$$

Por outro lado, dados $\{i_1, ..., i_k\}$ em I e $F_{i_r} \subset J_{i_r}$, F_{i_r} finito, $1 \leq r \leq k$, é claro que

$$\sum_{n \in F_{i_1}} p_n^{i_1} + ... + \sum_{n \in F_{i_k}} p_n^{i_k} \leq \sum_{\mathbb{N}} p_n \ .$$

Fixando $F_{i_2}, ..., F_{i_k}$ e tomando o supremo sobre a família dos conjuntos finitos F_{i_1} em J_{i_1} temos $\sum_{J_{i_1}} p_n^{i_1} + \sum_{F_{i_2}} p_n^{i_2} + ... + \sum_{F_{i_k}} p_n^{i_k} \leq \sum p_n$. Nesta desigualdade, fixos $F_{i_3}, ...F_{i_k}$, tomando o supremo sobre a família de conjuntos finitos $F_{i_2} \subset J_{i_2}$ temos $\sum_{J_{i_1}} p_n^{i_1} + \sum_{J_{i_2}} p_n^{i_2} + \sum_{F_{i_3}} p_n^{i_3} + ... + \sum_{F_{i_k}} p_n^{i_k} \leq \sum p_n$ e, por indução,

$$\sum_{J_{i_1}} p_n^{i_1} + \sum_{J_{i_2}} p_n^{i_2} + ... + \sum_{J_{i_k}} p_n^{i_k} \leq \sum_{\mathbb{N}} p_n \quad .$$

Finalmente, como $\{i_1, i_2, ...i_k\}$ é qualquer subconjunto finito de I,

$$\sum_{i \in I} \sum_{n \in J_i} p_n^i \leq \sum p_n \ \blacksquare$$

[3]O símbolo $\biguplus$ indica uma reunião de conjuntos dois a dois disjuntos. Neste caso, $J_i \cap J_{i'} = \varnothing$ se $i \neq i'$.

Teorema 4.21 *(**Lei Associativa Para Somas**) Seja* $\sum\limits_{\mathbb{N}} a_n$ *em* $\mathbb{K}$ *e somável. Isto é,* $\sum a_n$ *absolutamente convergente. Se* $\mathbb{N} = \biguplus\limits_{I} J_i$[4], $I \subset \mathbb{N}$ *um conjunto de índices, então*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{\mathbb{N}} a_n = \sum_{I} \sum_{n \in J_i} a_n.$$

Prova Em $\mathbb{R}$ segue da decomposição $\sum\limits_{\mathbb{N}} a_n = \sum p_n - \sum q_n$, e do Lema 4.20. Em $\mathbb{C}$, segue da decomposição $\sum\limits_{\mathbb{N}} a_n = \sum\limits_{\mathbb{N}} Re(a_n) + i \sum\limits_{\mathbb{N}} Im(a_n)$ e do caso anterior ■

Proposição 4.22 *Se* (a_n) *é somável e* (I_n) *é uma sequência crescente de subconjuntos de* $\mathbb{N}$ *tal que* $\bigcup I_n = \mathbb{N}$ *(sequência exaustiva para* $\mathbb{N}$*) então,* $(a_k)_{k \in I_n}$ *é somável e* $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k \in I_n} a_k = \sum\limits_{\mathbb{N}} a_n$.

Prova Segue da definição de somabilidade (verifique) ■

4.4 - Somas de uma Sequência Dupla e o Produto de Séries

Observação 4.23 *Os resultados sobre sequências (somáveis) 4.15, 4.16, 4.20, 4.21 e 4.22, dependentes apenas da enumerabilidade de* $\mathbb{N}$ *e não de sua ordem, estendem-se naturalmente a famílias enumeráveis. Em particular, a famílias indexadas em subconjuntos de* $\mathbb{N}$ *ou* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Seguem versões análogas ao Teorema 4.21 e Proposição. 4.22 para uma família $(x_{(n,m)})_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, também denominada **sequência dupla**. Indicamos $x_{nm} = x_{(n,m)}$ e $\sum\limits_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} x_{nm} = \sum\limits_{n,m} x_{nm} = \sum x_{nm}$, a soma da família indicada na matriz infinita:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \ldots\ldots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \ldots\ldots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

Teorema 4.24 *Se* $\sum |x_{nm}| < \infty$ *segue que* (x_{nm}) *é somável e,*

(a) Se $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \biguplus\limits_{i \in I} J_i$, I *enumerável, é uma partição de* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *então,*

$$\sum_{i \in I} \sum_{(n,m) \in J_i} x_{nm} = \sum x_{nm} \ .$$

(b) Se $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *é uma sequência crescente de subconjuntos de* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *tal que* $\bigcup I_k = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *então,*

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{(n,m) \in I_k} x_{nm} = \sum x_{nm} \ .$$

(c) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sum\limits_{m=0}^{+\infty} x_{nm} = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_{nm} = \sum x_{nm}$.

(d) Para toda bijeção $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} x_{\sigma(i)} = \sum x_{nm}$.

[4] O símbolo $\biguplus$ indica uma reunião de conjuntos dois a dois disjuntos.

Prova: A somabilidade segue imediatamente da Observação 4.23 e do Teorema 4.15.

(a) e (b): São versões do Teorema 4.21 e Prop. 4.22, respectivamente [v. Fig. 4.1. p. 68].

(c) Por (a) e Teorema 4.21 temos, $\sum_{m=0}^{+\infty} x_{nm} = \sum_{m\in\mathbb{N}} x_{nm}$ e $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} x_{nm} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} x_{nm} = \sum_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} x_{nm}$ [vide p. 68, Figura 4.2 e Figura 4.3(a)].

(d) Pelo Teorema 4.16 (c) a série definida é comutativamente convergente com soma $\sum x_{nm}$ ∎

Observação 4.25 *Dadas duas séries convergentes,* $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = x$ *e* $\sum_{m=0}^{+\infty} y_m = y$*, é óbvio que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} x_n y_m = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_m = xy \ .$$

Dadas $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ e $\sum_{m=0}^{+\infty} y_m$ há, evidententemente, infinitas maneiras de "agruparmos" os termos da sequência dupla $(x_n y_m)$ para formarmos uma série.

Definição 4.26 *Dadas as séries* $\sum^{+\infty} x_n$ *e* $\sum^{+\infty} y_m$*, seu* **produto de Cauchy** *é a série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{p=0}^{n} x_p\, y_{n-p}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i+j=n} x_i y_j = (x_0y_0) + (x_0y_1 + x_1y_0).... \ .$$

Tal produto surge, no caso finito, em multiplicação de polinômios e, no caso infinito, no produto de séries de potências [vide Exemplo 4.28 e Figura 4.3(b), p. 68].

Corolário 4.27 *Se* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} y_m = y$ *convergem absolutamente então,* $\sum |x_n y_m| < \infty$ *e,*

(a) $\sum_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} x_n y_m = xy$.

(b) [5] *Para toda bijeção* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$*:* $\sum_{(n,m)=\sigma(i),\, i=0}^{+\infty} x_n y_m = xy$.

(c) O **produto de Cauchy** *das séries dadas é uma série absolutamente convergente e,*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{p=0}^{n} x_p\, y_{n-p}\Big) = xy$$

Prova: Obviamente $\sum |x_n y_m| < \infty$ e, pelo Teorema 4.24, a família $(x_n y_m)_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ é somável.

(a) Pelo Teorema 4.24 (c) temos $\sum_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} x_n y_m = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} x_n y_m = xy$.

(b) Segue do Teorema 4.24(d), notando ainda que pelo ítem anterior temos $\sum x_n y_m = xy$.

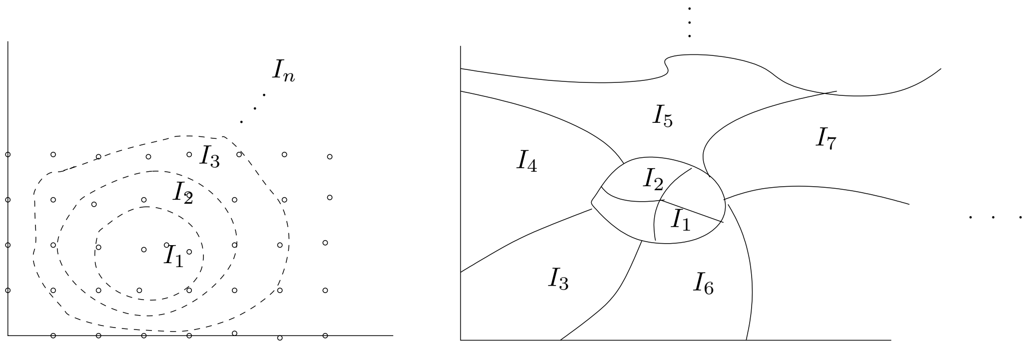
(c) Consideremos a partição (J_k) de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $J_k = \{(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : i+j = k\}$ finito. Pelo Teorema 4.24(a) temos,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i+j=n} x_i y_j = \sum x_n y_m \, ,$$

e, pela Proposição 4.8,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i+j=n} x_i y_j = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i+j=n} x_i y_j \quad ∎$$

[5] Cauchy, em **Cours d'Analyse**, 1821, p. 237, provou tal resultado para séries absolutamente convergentes.



$I_n \subset I_{n+1}$ e $\bigcup I_n = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{I_n} x_{ij} = \sum\limits_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} x_{nm}$

(a) Sequência exaustiva para $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

$I_n \bigcap I_m \neq \varnothing\,, n \neq m\,,$ e $\bigcup I_n = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$\sum\limits_{\mathbb{N}} \sum\limits_{I_n} x_{ij} = \sum\limits_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} x_{ij}$

(b) Associatividade.

Figura 4.1: Para Teorema 4.24 (b) e (a).

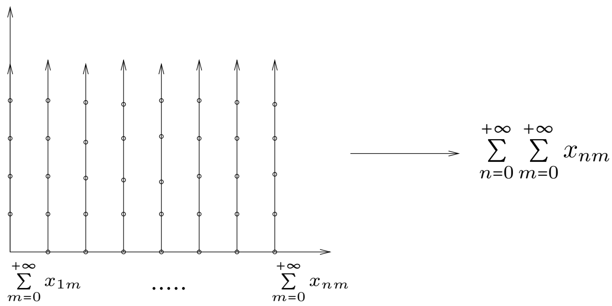
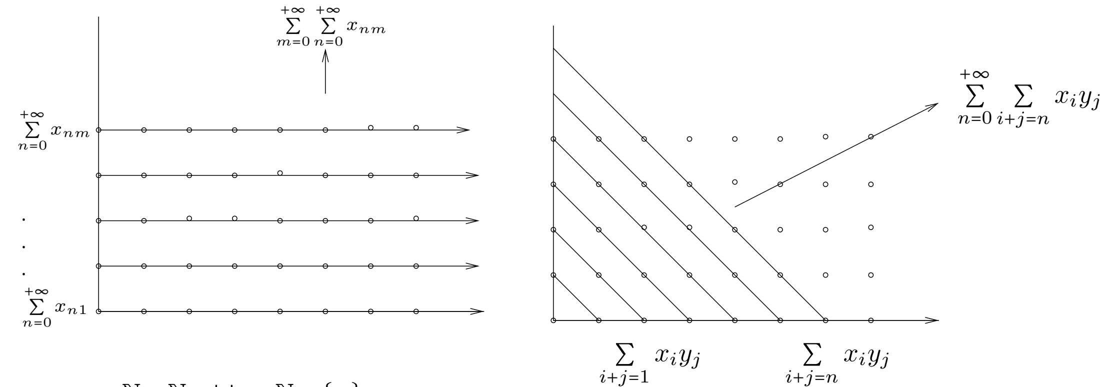


Figura 4.2: Para Teorema 4.24 (c) - $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sum\limits_{m=0}^{+\infty} x_{nm} = \sum\limits_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} x_{nm}$



$\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}\times\{n\}$

(a) $\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_{nm} = \sum\limits_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} x_{nm}$

O Produto de Cauchy

(b) $\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{(i,j) : i+j=n\}$

Figura 4.3: Teorema 4.24 (c) ; Definição 4.26

Exemplo 4.28 *Justifiquemos a fórmula para o produto de Cauchy.*

(a) Se $a_0+a_1z+...+a_nz^n$ e $b_0+b_1z+...+b_mz^m$ são polinômios na variável $z\in\mathbb{C}$, com coeficientes complexos, é claro que

$$(a_0+a_1z+...+a_nz^n)(b_0+b_1z+...+b_mz^m)=\sum_{p=0}^{n+m}c_pz^p\,,\ \text{com } c_p=\sum_{n+m=p}a_nb_m\ .$$

(b) Sejam $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ e $g(z)=\sum_{m=0}^{+\infty}b_mz^m$ séries em $\mathbb{C}$ e absoluta/e convergentes $\forall z\in\mathbb{C}$.

Pelo Corolário 4.27 (a) temos,

$$f(z)g(z)=\sum_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}a_nb_mz^nz^m=\sum_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}a_nb_mz^{n+m}\ ,$$

e pelo Teorema 4.24 (a) $\big[$utilizando a partição $\mathbb{N}\times\mathbb{N}=\biguplus_{p\in\mathbb{N}}\{(n,m):n+m=p\}\big]$,

$$\sum_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}a_nb_mz^{n+m}=\sum_{p\in\mathbb{N}}\sum_{n+m=p}a_nb_mz^p=\sum_{p\in\mathbb{N}}c_pz^p\,,\quad \text{com } c_p=\sum_{n+m=p}a_nb_m\ .$$

Agora, pelo Teorema 4.16(a), temos $\sum_{p\in\mathbb{N}}c_pz^p=\sum_{p=0}^{+\infty}c_pz^p$ e, finalmente,

$$f(z)g(z)=\sum_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}a_nb_mz^{n+m}=\sum_{p=0}^{+\infty}c_pz^p\,,\quad \text{com } c_p=\sum_{n+m=p}a_nb_m\ .$$

Exemplo 4.29 *Se* $|z|<1$*, a soma da sequência dupla dada pela matriz infinita abaixo é* $\frac{z}{(1-z)^2}$.

$$\begin{pmatrix} z & z^2 & z^3 & z^4 & ..... \\ z^2 & z^3 & z^4 & z^5 & ..... \\ z^3 & z^4 & z^5 & z^6 & ..... \\ ..... & ..... & ..... & .... & ..... \\ ..... & ..... & ..... & .... & ..... \end{pmatrix}$$

Verificação: Mostremos, primeiro, que a sequência é somável.

A soma dos valores absolutos dos elementos na n-ésima linha, $n=1,2,...$ é

$$\sum_{p\in\mathbb{N}}|z|^{n+p}=\sum_{p=1}^{+\infty}|z|^{n+p}=\frac{|z|^n}{1-|z|}\,,$$

e, somando tais resultados obtemos,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{|z|^n}{1-|z|}=\frac{1}{1-|z|}\sum_{n=1}^{+\infty}|z|^n=\frac{|z|}{(1-|z|)^2}\ .$$

Então, pelo Teor. 4.24(c) efetuamos a soma da sequência obtendo, é claro, $\frac{z}{(1-z)^2}$ ∎

4.5 - Aplicação: A Função Exponencial Complexa

Teorema 4.30 *A função exponencial complexa,*

$$exp(z) = \sum_{0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \ , z \in \mathbb{C} \ ,$$

é bem definida, satisfazendo as propriedades abaixo.

(a) $exp(z+w) = exp(z)exp(w), \ \forall \ z, w \in \mathbb{C}$.

(b) $\exp(0) = 1$, *e para todo* $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z)^{-1} = \exp(-z)$ *e* $\exp(z) \neq 0$.

(c) Introduzindo a **notação** $e^z = \exp(z)$ *temos,* $\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$, *para* $h \in \mathbb{C}^*$.

(d) $\lim_{h\to 0} \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = e^z \, , \forall z \in \mathbb{C}$.

(e) A restrição de $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *a* $\mathbb{R}$ *é a função exponencial real* $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$.

(f) **Fórmula de Euler** $e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta \, , \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad e^{i\pi} + 1 = 0$,

$$cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!}....(-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + ... \ ; \quad sen\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + ... + \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}.... \ .$$

(g) $e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y, \ \forall x \, , y \in \mathbb{R}$.

(h) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$ *e* $|e^z| = e^{Re(z)}$.

(i) A função $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *é* $2\pi i$ *periódica.*

(j) $e^z = 1$ *se e somente se* $z \in 2\pi i\mathbb{Z}$.

(k) Para todo $w \in \mathbb{C}^*$ *existe* z *(único módulo* $T = 2\pi i$*) tal que* $e^z = w$.

(l) Pelo isomorfismo $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$, *para todo* $k \in \mathbb{Z}$, *é uma bijeção a restrição,*

$$\begin{cases} \exp : \mathbb{R} \times [k\pi, k\pi + 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \, , \\ \exp(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y). \end{cases}$$

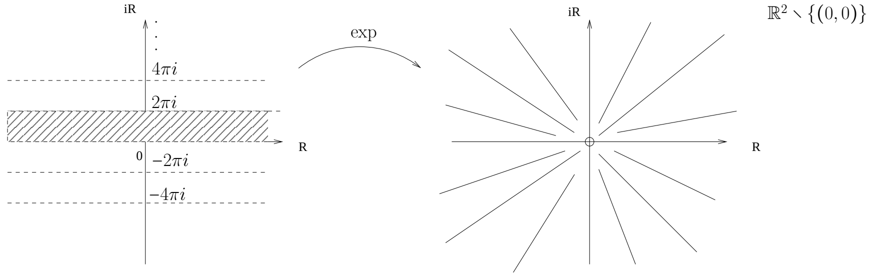


Figura 4.4: A aplicação $\exp : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$

Prova:

(a) O produto de Cauchy das séries absolutamente convergentes $exp(z)$ e $exp(w)$ é,

$$e^z e^w = (\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!})(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{w^m}{m!}) = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n+m=p} \frac{1}{n!\,m!} z^n w^m =$$

$$= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p\,!} \sum_{n=0}^{n=p} \frac{p\,!}{n!\,(p-n)!} z^n w^{p-n} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p\,!} \sum_{n=0}^{n=p} \binom{p}{n} z^n w^{p-n} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(z+w)^p}{p\,!} = e^{z+w} .$$

(b) Consequência imediata de (a).

(c) Temos, $\frac{e^h-1}{h} = \frac{1}{h}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} - 1\right) = \frac{1}{h}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} = 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + ...$ Logo, se $|h| \leq 1$, $h \neq 0$,

$$|\frac{e^h-1}{h} - 1| \leq \frac{|h|}{2!} + \frac{|h|^2}{3!} + ... \leq |h|[\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...] \leq e|h|.$$

Portanto, $\lim_{h\to 0}\left[\frac{e^h-1}{h} - 1\right] = 0.$

(d) Temos, por (c), $\lim_{h\to 0} \frac{e^{z+h}-e^z}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^z e^h - e^z}{h} = e^z \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^z.$

(e) Óbvio.

(f) Primeiramente, é fácil ver que

$$e^{i\theta} = \left[1 - \frac{\theta^2}{2!}....(-1)^n\frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + ...\right] + i\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + ... + \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}....\right].$$

Por fim, as partes real e imaginária da expansão em série de $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, são as séries de Taylor na origem de $\cos\theta$ e $sen\theta$ [vide Exemplos 3.10 (b) e (c)].

(g) Segue imediatamente da Fórmula de Euler em (f).

(h) Segue trivialmente de (g).

(i) Consequência imediata de (g).

(j) Se $z = 2k\pi i\,, k \in \mathbb{Z}$, é claro que $e^z = e^{2k\pi i} = 1$. Se $e^z = 1$ então $1 = |e^z| = e^{Re(z)}$ e $Re(z) = 0$; logo, $z = iIm(z)$ e $1 = e^{iIm(z)} = \cos Im(z) = i\sin Im(z)$; donde, $Im(z) \in 2k\pi\mathbb{Z}$.

(k) Seja $z = \log|w| + iarg(w)$. Por (g) é claro que $e^z = e^{\log|w|}[\cos arg(w) + i\sin arg(w)] = |w|[\cos arg(w) + i\sin w] = w$. Por (i), se $e^{z_1} = w$ e $z_2 = z_1 + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, então $e^{z_2} = w$.

Se $e^{z_1} = e^{z_2} = w$, com $z_1\,, z_2 \in \mathbb{C}$, por (b) temos $e^{z_1-z_2} = ww^{-1} = 1$ e, por (j), $z_1 - z_2 \in 2\pi i\mathbb{Z}$.

(l Segue de (k) ∎

Definição 4.31 *As funções* $\cos, sen : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *são dadas pelas, respectivas, séries*

$$cosz = 1 - \frac{z^2}{2!}....(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} + ... \ ; \quad sen\,z = z - \frac{z^3}{3!} + ... + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.... .$$

Corolário 4.32 *As séries que definem as funções complexas* $\cos(z)$ *e* $sen(z)$*,* $z \in \mathbb{C}$*, são absolutamente convergentes em todo o plano e,*

$$e^{iz} = \cos\,z \ + \ isen\,z\,, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

4.6 - O Produto de Duas Séries Não Necessariamente Absolutamente Convergentes

Mostremos que para o produto de Cauchy de duas séries convergir é necessário que ambas convirjam absolutamente. Utilizemos a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, que não é absolutamente convergente pois $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{n+1}$ e $\sum \frac{1}{n} = +\infty$, mas é convergente (condicionalmente) pelo Critério de Leibnitz.

Exemplo 4.33 *O produto de Cauchy da série* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ *por si mesma é uma série divergente.*

Verificação: Seja $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$. Temos, $0 \leq (m-n)^2 = m^2 - 2mn + n^2\,, \forall m, n \in \mathbb{N}$, e $2\sqrt{m+1}\sqrt{n+1} \leq m+1+n+1 = m+n+2$. Então, se $m+n=p$, $(-1)^p a_m a_n = \frac{1}{\sqrt{m+1}\sqrt{n+1}} \geq \frac{2}{p+2}$ e,

$$(-1)^p \sum_{m+n=p} a_m a_n \geq \sum_{m+n=p} \frac{2}{p+2} = (p+1)\frac{2}{p+2} \geq 1\,,\ \ \forall p \in \mathbb{N}\ .$$

Logo, o termo geral $c_p = \sum_{m+n=p} a_m a_n$ do produto de Cauchy não tende a zero e este diverge ■

Generalizando tal exemplo, mostremos a recíproca do Cor. 4.27 (b) (provado por Cauchy).

Definição 4.34 *A série* $\sum^{+\infty} a_n$, $a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *é a* **série nula**.

Proposição 4.35 *As séries não nulas* $\sum^{+\infty} a_n = a$ *e* $\sum^{+\infty} b_m = b$ *são absolutamente convergentes se e só se para toda bijeção* $\sigma : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *a série* $\sum_{p=0}^{+\infty} c_p$, $c_p = a_n b_m$, *com* $\sigma(n,m) = p$, *é convergente. Ainda, ocorrendo tais hipóteses, temos* $\sum^{+\infty} c_p = ab$ *qualquer que seja a bijeção* σ.

Prova: ($\Rightarrow$) Segue do Corolário 4.27 (b).

($\Leftarrow$) Fixa uma bijeção $\sigma : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, a série $\sum^{+\infty} c_p$, $c_p = a_n b_m$ e $p = \sigma(n,m)$, é, devido às hipóteses, comutativamente convergente e, pelo Teorema 4.16, absolutamente convergente. Logo, $\sum |a_n b_m| < \infty$ e então, para $a_{n_0} \neq 0$,

$$|a_{n_0}| \sum_{m\in\mathbb{N}} |b_m| = \sum_{m\in\mathbb{N}} |a_{n_0}||b_m| \leq \sum |a_n b_m| < \infty\,,$$

e portanto $\sum |b_m| < \infty$. Analogamente, temos que $\sum |a_n| < \infty$.

Por fim, pelo Corolário 4.27 (c), temos $\sum^{+\infty} c_p = ab$, para toda bijeção $\sigma : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ■

Definição 4.36 *Dadas* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{m=0}^{+\infty} b_m$ *e uma bijeção* $\sigma : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *a série* $\sum^{+\infty} c_p$, $c_p = a_n b_m$, $p = \sigma(n,m)$ *é* **um produto** *das séries* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{m=0}^{+\infty} b_m$.

Obs. O produto de Cauchy entre duas séries $\sum^{+\infty} a_n$ e $\sum^{+\infty} b_n$ não é, em geral, um produto. Porém, ele pode ser obtido por associação de algumas das séries definidas como um produto.

Teorema 4.37 (Mertens, 1875)[6] *Se* $\sum^{+\infty} a_n = A$, *com convergência absoluta, e* $\sum^{+\infty} b_n = B$, *ambas em* $\mathbb{K}$, *então o produto de Cauchy destas duas séries converge e tem soma* AB.

Prova: Sejam $c_n = \sum_{k=o}^{n} a_k b_{n-k}$ e

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\,, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k\,, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k\,, \quad \beta_n = B_n - B\ .$$

Então,

$$\begin{aligned} C_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + ... + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_n b_0) \\ &= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + ... + a_n B_0 \\ &= a_0(B + \beta_n) + a_1(B + \beta_{n-1}) + ... + a_n(B + \beta_0) \\ &= A_n B + (a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + ... + a_n\beta_0)\ . \end{aligned}$$

Destacando a segunda parcela entre parenteses no último membro acima,

$$\gamma_n = a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + ... + a_n\beta_0\ ,$$

temos $C_n = A_n B + \gamma_n$ e como $\lim A_n B = AB$, resta apenas verificarmos que $\lim \gamma_n = 0$.

Por hipótese,

$$\alpha = \sum^{+\infty} |a_n| < \infty \qquad \text{e} \qquad \lim \beta_n = 0\ ,$$

e dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\beta_n| \le \epsilon$, $\forall n \ge N$. Desta forma, para $n > N$ temos,

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &\le |\beta_0 a_n + ...\beta_N a_{n-N}| + |\beta_{N+1} a_{n-N-1}| + ... + |\beta_n a_0| \\ &\le |\beta_0 a_n + ...\beta_N a_{n-N}| + \epsilon\alpha\ . \end{aligned}$$

Assim, como $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, temos $\lim_{n\to+\infty} |\beta_0 a_n + ...\beta_N a_{n-N}| = 0$ e consequentemente,

$$\limsup |\gamma_n| \le \epsilon\alpha \quad \forall \epsilon > 0 \ \blacksquare$$

No capítulo 6, sobre séries de potências, provaremos trivialmente o resultado abaixo.

Teorema 4.38 (Abel, 1826) *Se* $\sum^{+\infty} a_n$, $\sum^{+\infty} b_n$ *e seu produto de Cauchy* $\sum^{+\infty} c_n$ *convergem,*

$$\sum^{+\infty} c_n = \Big(\sum^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} b_n\Big)\ .$$

4.7 - Somabilidade de Cesaro

A **Soma de Cesaro** é uma das mais úteis formas de somabilidade e muito importante em **Séries de Fourier** (já citamos que também o Critério de Dirichlet é importante em séries de Fourier). No Exemplo 2.46 (3) mostramos que se uma sequência (z_n) converge a z então a sequência formada pelas médias aritméticas de (z_n) também converge a z. Vejamos então que o conceito de somabilidade segundo Cesaro é mais geral que o de série.

[6] Franz C. J. Mertens (1840-1927), de ancestralidade germânica, nasceu em uma vila à época na Prussia e hoje na Polônia e foi aluno de Weierstrass em Berlim.

Definição 4.39 *Dada* $\sum^{+\infty} z_n$*, seja* s_n *a* n*-ésima soma parcial desta série e*

$$\tau_n = \frac{s_1 + ... + s_n}{n}\,, n \in \mathbb{N}\ .$$

A série $\sum z_n$ *é* **Cesaro-somável** *[ou (C,1) somável] se* (τ_n) *converge. Se* $\lim \tau_n = s$ *então* s *é* **a soma de Cesaro** *[ou* **soma (C,1)***] de* $\sum^{+\infty} z_n$ *e escrevemos,*

$$\sum z_n = s \qquad (C,1)\ .$$

Teorema 4.40 *Se* $\sum^{+\infty} z_n = s \in \mathbb{C}$ *então*

$$\sum^{+\infty} z_n = s \qquad (C,1)\ .$$

Prova: Consequência imediata do Exemplo 2.46 (3) pois $\lim s_n = s$ ∎

Exemplo 4.41 *Seja* $a_n = z^n$*,* $|z| = 1$*,* $z \neq 1$*. Então,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z^{n-1} = \frac{1}{1-z} \qquad (C,1) \qquad e \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} = \frac{1}{2} \qquad (C,1)\ .$$

Verificação: Pela fórmula para o somatório finito de uma progressão geométrica temos,

$$s_n = \frac{1}{1-z} - \frac{z^n}{1-z} \quad ,$$

$$\tau_n = \frac{s_1 + ... + s_n}{n} = \frac{\frac{n}{1-z} - \frac{1}{1-z}(z + ...z^n)}{n} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{n}\frac{z(1-z^n)}{(1-z)^2}\ .$$

Desta forma, visto que $\left|\frac{z(1-z^n)}{(1-z)^2}\right| = \frac{|1-z^n|}{|1-z|^2} \leq \frac{2}{|1-z|^2}$, concluímos

$$\lim_{n\to+\infty} \tau_n = \frac{1}{1-z} \ ∎$$

Apêndice 1 - Teorema de Riemann

Teorema 4.42 Riemann *Seja* $\sum^{+\infty} a_n$ *uma série real e condicionalmente convergente. Dados* $x, y \in [-\infty, +\infty]$, $x \leq y$, *existe uma rearranjo* $\sum^{+\infty} b_n$ *de* $\sum a_n$ *tal que, se* $s_n = b_1 + ... + b_n$,

$$\liminf s_n = x \quad e \quad \limsup s_n = y \ .$$

Prova: Sejam p_n a parte positiva de a_n e q_n a parte negativa de a_n. Como $\sum^{+\infty} a_n < \infty$, temos $0 = \lim a_n = \lim p_n = \lim q_n$. Entretanto, $\sum |a_n| = +\infty$, donde $\sum p_n = +\infty$ ou $\sum q_n = +\infty$ e, como existe $\lim \sum_{i=1}^{n} a_i = \lim(\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{n} q_i)$, concluímos que $\sum p_n = \sum q_n = +\infty$.

Consideremos a partição $\mathbb{N} = P \cup Q$, $P = \{i : a_i = p_i \geq 0\}$, $Q = \{j : a_j = -q_j < 0\}$ e $x, y \in \mathbb{R}$. Reordenamos $\sum^{+\infty} a_n$ tomando os n_1 primeiros índices em P, indicados $\{1, ..., n_1\}$, tais que

$$p_1 + ... + p_{n_1} > y \ .$$

Em seguida, tomamos os n_2 primeiros índices em Q, indicados $\{1, 2, ..., n_2\}$, tais que

$$p_1 + p_2 + ... + p_{n_1} - q_1 - q_2 - ... - q_{n_2} < x \ .$$

Subtraídos em P os índices já selecionados, escolhemos os novos primeiros índices, indicados $\{n_1 + 1, ..., n_3\}$, tais que

$$p_1 + p_2 + ... + p_{n_1} - q_1 - q_2 - ... - q_{n_2} + p_{n_1+1} + ... + p_{n_3} > y \ .$$

Procedendo analogamente com Q, retirados os índices já coletados, pegamos os primeiros índices $\{n_3 + 1, ..., n_4\}$ satisfazendo

$$p_1 + p_2 + ... + p_{n_1} - q_1 - q_2 - ... - q_{n_2} + p_{n_1+1} + ... + p_{n_3} - q_{n_3+1} - .... - q_{n_4} < x \ .$$

Continuando este processo ad infinitum obtemos um rearranjo $\sum^{+\infty} b_n$ de $\sum^{+\infty} a_n$ tal que se (s_n) é a sequência de suas somas parciais temos, para i ímpar,

$$s_{n_{i+1}} < x \leq y < s_{n_i} \ , \quad s_{n_i} - p_{n_i} \leq y \quad \text{e} \quad s_{n_{i+1}} + q_{n_{i+1}} \geq x \ ;$$

donde segue $0 < x - s_{n_{i+1}} \leq q_{n_i+1}$ e $0 < s_{n_i} - y \leq p_{n_i}$ e então (s_{n_i}), i par, converge a x e (s_{n_i}), i ímpar, converge a y. Além disso, é fácil ver que para i ímpar, $n_i < n < n_{i+1}$ implica $s_{n_i+1} \leq s_n \leq s_{n_i}$. Assim, se s é um valor de aderência de (s_n) não é possível $s > y$ e também não é possível $s < x$. Logo, temos $x \leq s \leq y$ e, como x e y são valores de aderência de (s_n), concluímos que x é o menor valor de aderência, $x = \liminf s_n$, e y o maior, $y = \limsup s_n$.

Os casos $x = -\infty$ ou $y = +\infty$ são análogos e mais simples e os deixamos ao leitor ■

Corolário 4.43 *Seja* $\sum^{+\infty} a_n$ *uma série real e condicionalmente convergente e* $x \in \mathbb{R}$. *Existe um rearranjo de* $\sum^{+\infty} a_n$ *convergente a* x.

Prova: Caso particular do Teorema 4.42, com $x = y$ ■