1ª Lista de Exercícios, 28 (a) - ELIPSE - MAT 220 - CÁLCULO IV - IFUSP
2º SEMESTRE de 2011
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1. Se $r = \langle x, y\rangle$, $r_1 = \langle x_1, y_1\rangle$, $r_2 = \langle x_2, y_2\rangle$, descreva o conjunto dos pontos r tais que,

$$|r - r_1| + |r - r_2| = R,\ R > |r_1 - r_2| \ .$$

Solução Antes de tudo, atentemos para a geometria para então simplificar a equação.

Chamemos s a reta por r_1 e r_2 (desenhe) e $C = \frac{r_1+r_2}{2}$ o ponto médio entre r_1 e r_2.

Trace por C a reta t, perpend. a s e mediatriz de $\overline{r_1 r_2}$ (pontos equidistam de r_1 e r_2).

Só há 2 pontos em t com soma das distâncias a r_1 e r_2 igual a R (distam $\frac{R}{2}$ de r_1 ou r_2).

Eles são simétricos em relação à reta s, por r_1 e r_2.

Desenhando é fácil ver, por semelhança de triângulos, que se r é um ponto da figura ($|r - r_1| + |r - r_2| = R$), r', o seu simétrico em relação a s, satisfaz a mesma equação. Logo, a figura a determinar é simétrica em relação a s.

Para o mesmo r, o ponto r'', simétrico de r em relação a t (perpend. a $\overline{r_1 r_2}$), também tem a propriedade: a soma de suas distâncias a r_1 e r_2 é R.

A figura tem eixos de simetria perpendiculares (t e s) e, um centro ($C = \frac{r_1+r_2}{2}$) e para desenhá-la basta faze-lo em um quadrante e então refletir em relação a t e s.

Seja x a reta t, y a reta s e adotemos $C = \frac{r_1+r_2}{2}$ como origem do sist. de coordenadas.

Nesse sistema: $r_1 = (\pm c, 0)$, $r_2 = (\mp c, 0)$. Suponhamos $c > 0$, $r_1 = (c, 0)$ e $r_2 = (-c, 0)$.

Assim, a equação adquire a forma:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = R \ .$$

Agora, confio que vocês conseguem chegar ao formato padrão (vide próxima página):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ \blacksquare$$

Vide próxima página para uma solução em $\mathbb{C}$.

2. Consideremos o problema anterior na variável $z \in \mathbb{C}$:

$$(2.1) \qquad |z - z_1| + |z - z_2| = 2a\,,\ 2a > |z_1 - z_2|\,,$$

com z_1 e z_2 fixos, e distintos, em $\mathbb{C}$ e a um real, $a > 0$. Temos,

$$\begin{cases} z - z_1 = z - \frac{z_1+z_2}{2} - \frac{z_1-z_2}{2} = w - \frac{z_1-z_2}{2} \\ z - z_2 = z - \frac{z_1+z_2}{2} + \frac{z_1-z_2}{2} = w + \frac{z_1-z_2}{2} \end{cases}$$

Se $\gamma = \frac{z_1-z_2}{2}$, pela translação $z \mapsto w = z - \frac{z_1+z_2}{2}$ mudamos a equação (2.1) para

$$(2.2) \qquad |w - \gamma| + |w + \gamma| = 2a\ .$$

Como $\frac{\gamma}{|\gamma|}$ tem módulo 1, a aplicação $\zeta \mapsto w = \frac{\gamma}{|\gamma|}\zeta$ é uma rotação e mudamos (2.2) para

$$\Big|\frac{\gamma}{|\gamma|}\zeta - \gamma\Big| + \Big|\frac{\gamma}{|\gamma|}\zeta + \gamma\Big| = 2a\ ,$$

e pondo $\frac{\gamma}{|\gamma|}$ em evidência, notando que $|\frac{\gamma}{|\gamma|}| = 1$, e simplificando,

$$\big|\,\zeta - |\gamma|\big| \ + \ \big|\,\zeta + |\gamma|\big| = 2a$$

Pondo $c = |\gamma| > 0$ temos (notemos que $c = |\gamma| = \frac{|z_1-z_2|}{2} < a$),

$$\big|\,\zeta - c\big|^2 = \big[\ 2a\ -\ \big|\,\zeta + c\big|\ \big]^2\ ,$$

e expressando ζ na forma $\zeta = u + iv$, $u\,, v \in \mathbb{R}$ (distinguindo de $z = x + iy$ para z),

$$(u-c)^2 + v^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(u+c)^2+v^2} + (u+c)^2 + v^2\,,$$

$$-2cu = 4a^2 - 4a\sqrt{(u+c)^2+v^2} + 2cu\,,$$

$$4a\sqrt{(u+c)^2+v^2} = 4a^2 + 4cu$$

e então, cancelando o 4 e elevando ao quadrado,

$$a^2u^2 + 2a^2cu + a^2c^2 + a^2v^2 = a^4 + 2a^2cu + c^2u^2\,,$$

$$(a^2 - c^2)u^2 + a^2v^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2)\ .$$

Assim, dividindo por $a^2(a^2 - c^2)$,

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{a^2 - c^2} = 1\ .$$

Finalmente, como $a^2 - c^2 > 0$, pois $0 < c < a$, existe $b > 0$ tal que $a^2 - c^2 = b^2$ e portanto,

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1 \quad \blacksquare$$

Tarefa: represente geometricamente as transformações realizadas.