Curso: MAT 220- CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV - IFUSP

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Período: Segundo Semestre de 2011

cm

LISTAS 6 DICAS

LISTA D

(•) Seja $f(z)$ uma função **inteira** (holomorfa em todo o plano complexo). Mostre que a função $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ também é inteira. Mostre, ainda, que a função $h(z) = \overline{f(z)}$ é derivável em $z_0 = 0$ se e somente se $f'(0) = 0$.

Sugestão:

Para a segunda parte verifique

$$(1) \qquad \frac{h(z) - h(0)}{z} = \overline{\frac{f(z) - f(0)}{z}}\,\frac{\overline{z}}{z}\,,$$

(2) existe $h'(0) \Leftrightarrow$ existe $\lim\limits_{z\to 0}\left[\overline{\frac{f(z)-f(0)}{z}}\,\frac{\overline{z}}{z}\right]$ e (3) não existe $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\overline{z}}{z}$ (verifique).

Assim, por (3), existe $\lim\limits_{z\to 0}\left[\overline{\frac{f(z)-f(0)}{z}}\,\frac{\overline{z}}{z}\right]$ se e somente se (verifique) $\lim\limits_{z\to 0}\overline{\frac{f(z)-f(0)}{z}} = 0$ ■

(•) Compute $\int_\gamma f(z)\,dz$ onde f e γ são dados.

(a) $f(z) = z\overline{z}$ e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(b) $f(z) = \frac{z+1}{z}$ e $\gamma(t) = 3e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(c) $f(z) = \frac{z+1}{z}$ e $\gamma(t) = 5i + e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(d) $f(z) = \frac{1}{z^2-2}$ e $\gamma(t) = 2 + e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(e) $f(z) = \frac{1}{z^2-2}$ e $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(f) $f(z) = \pi e^{\pi\overline{z}}$ e γ é o quadrado de vértices 0, 1, $1+i$ e i, positivamente orientado.

(g) $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ e $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, $r > 0$.

(h) $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n}$ e $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, $r > 0$, $n \ge 2$.

(i) $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2}$ e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(j) $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$ e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(k) $f(z) = \frac{\log z}{z^n}$ e $\gamma(t) = 1 + \frac{1}{4}e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(l) $f(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{z^n}$ e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, $n \ge 1$.

(m) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ e $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

Respostas e Sugestões:

Respostas:

(a) zero

(b) $2\pi i$

(c) zero

(d) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}i$

(e) zero

(f) ....

(g) $2\pi i$

(h) zero

(i) -2π

(j) $-\frac{2\pi i}{3!}$

(k) zero

(l) $\frac{2[1+(-1)^{n-1}]\pi}{(n-1)!}i$

(m) zero

Sugestões:

(d) Definindo $f(z) = \frac{1}{z+\sqrt{2}}$ temos que f é holomorfa em um aberto contendo a curva γ e a região limitada por γ (o "interior´´ da curva γ) e que $\sqrt{2}$ pertence a esta região. Logo, pela fórmula integral de Cauchy [vide Teorema 2.6, no livro texto, página 114],

$$f(\sqrt{2}) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-\sqrt{2}}\,dz \Rightarrow \quad \int_\gamma \frac{1}{z^2-2}\,dz = \int_\gamma \frac{\frac{1}{(z+\sqrt{2})}}{z-\sqrt{2}}\,dz = 2\pi f(\sqrt{2})i = 2\pi\frac{1}{2\sqrt{2}}i = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i \quad \blacksquare$$

(•) Mostre que $\int_\gamma \frac{e^{kz}}{z}\,dz = 2\pi i$, onde k é uma constante real e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Use esse resultado para mostrar que

$$\int_0^\pi e^{k\cos t}\cos(k\sin t)\,dt = \pi \ .$$

Sugestão:

Pela Fórmula Integral de Cauchy temos,

$$1 = e^{k0} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{kz}}{z-0}\,dz \ .$$

Logo, se $\mathrm{Im}(a+bi) = b$ é a parte imaginária de um número complexo $z = a+bi$,

$$\mathrm{Im}\left\{\int_\gamma \frac{e^{kz}}{z-0}\,dz\right\} = 2\pi \ , \quad .$$

Substituindo $\gamma(t) = e^{it} = \cos t + \sin t\,, t \in [0, 2\pi]$, compute então,

$$\mathrm{Im}\left\{\int_\gamma \frac{e^{kz}}{z}\,dz\right\} \qquad \blacksquare$$

(•) Se f é uma função inteira e existem $M \ge 0$, $R > 0$ e $n \ge 1$ tais que $|f(z)| \le M|z|^n$ para $|z| \ge R$, mostre que f é um polinômio de grau menor ou igual a n.

Sugestão:

Considere γ a parametrização da curva centrada na origem e de raio $R' \ge R$ e utilize as Estimativas de Cauchy, Corolário 6.31, para mostrar que, para $m \ge n+1$,

$$|f^{(m)}(0)| \ \le \frac{\text{cte.}}{R'^{\,m-n}} \qquad .$$

Por fim, como f é inteira utilize

$$f(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^j \qquad \blacksquare$$

(•) **Igualdade de Parsevall**: Se $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, $\forall z \in \overline{D}_\rho(z_0)$, e se $r \le \rho$, então

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+re^{i\theta}|^2 d\theta = \sum |a_n|^2 r^{2n} \ .$$

Aplique tal identidade para dar uma outra prova do **Princípio do Módulo Máximo.**

Sugestão:

Observemos que

$$f(z_0+re^{i\theta}) \ = \ \sum_{n=0}^{=\infty} a_n r^n e^{in\theta} \, ,$$

e que

$$\sum_{n=0}^{=\infty} |\, a_n r^n e^{in\theta} \,| \ \le \ \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n | \ \le \ \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \rho^n \ < \infty \quad , \text{ por hipótese.}$$

Portanto, pelo Teste−M de Weieirstrass a série de funções

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta} \, , \quad (r,\theta) \in [0,\rho] \times [0,2\pi]$$

é uniformemente e absolutamente convergente em $[0,\rho] \times [0,2\pi]$. Complete o argumento.