MAT 216 - Cálculo III - IFUSP - Primeiro semestre de 2014

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

LISTA 5 DE EXERCÍCIOS

1. Seja $f(x,y) = 1$, para todo $(x,y) \in R = [a,b] \times [c,d]$. Prove que

$$\iint_R f(x,y)dxdy = (b-a)(d-c).$$

2. Seja $f : R = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ se } (x,y) \in (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap R \\ \\ 0 \text{ se } (x,y) \notin (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap R. \end{cases}.$$

   Determine se f é integrável ou não. Se f é integrável, compute sua integral.

3. Prove, a partir da definição de integral dupla e da teoria da integração em $\mathbb{R}$,

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} xdxdy = \frac{(b^2-a^2)}{2}(d-c) = (d-c)\int_a^b xdx.$$

4. Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ contínuas e positivas. Prove, a partir da definição de integral dupla e da teoria da integração em $\mathbb{R}$, que fg é integrável e

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x)g(y)dxdy = \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_c^d g(y)dy\right).$$

5*. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ integrável, com ∂A de conteúdo nulo. Mostre as afirmações abaixo.

   (i) A restrição de f ao aberto $\text{int}(A)$, denotada por $f\Big|_{\text{int}(A)} : \text{int}(A) \to \mathbb{R}$, e que abusando da notação indicamos apenas por f, é integrável e

$$\iint_{\text{int}(A)} fdxdy = \iint_A fdxdy.$$

   (ii) Consideremos $\overline{f} : \overline{A} \to \mathbb{R}$ uma extensão limitada qualquer de f ao compacto $\overline{A}$. Então, $\overline{f}$ é integrável e

$$\iint_{\overline{A}} \overline{f}dxdy = \iint_A fdxdy.$$

   Dica. Utilize resultados nas notas de aulas.

6. Seja $F : R = [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ integrável e $C \subset R$ tal que C tem conteúdo nulo. Seja $G : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ limitada tal que $G \equiv F$ em $R \smallsetminus C$. Mostre que G é integrável e
$$\iint_{a,b]\times[c,d]} G dxdy = \iint_{[a,b]\times[c,d]} F dxdy.$$
Dica. Aplique o Teorema de Caracterização para funções integráveis.

7. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ contínua e A um subconjunto limitado do plano com fronteira de conteúdo nulo. Mostre que f é integrável.

   Dica. Aplique o Teorema de Caracterização para funções integráveis.

8. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ integrável. Mostre que $|f| : A \to \mathbb{R}$ é integrável e
$$\left| \iint_A f(x,y) dxdy \right| \leq \iint_A |f(x,y)| dxdy.$$
Dica. Aplique o Teorema de Caracterização para funções integráveis.

Estes exercícios estão em Um Curso de Cálculo, H. L. Guidorizzi, Vol 3, 5 ed.

Seção 3.1 (Integral Dupla e Teorema de Fubini), pp. 71-74:

1. b), d), f), h), j) e m).
3. b), d) e f).
4. b), d) e f).
5. b), d), f) e h).
6. b), d), f), h), j), m), o) e q).
7. b), d), f), h), j), m), o), q) e s).
8. b), d), f), h), j), m) e o).
9. b) e d).

Seção 4.2 (Mudança de Variáveis), pp. 98-100:

1. b), d), e), f), g), i) e l).
2. a), c), e) e g).
3.
4.
5.
6.
7.
8.