MAT 216 - Cálculo III - IFUSP
Primeiro semestre de 2014
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

3ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1. (a) Enuncie o Teorema da Função Inversa para uma função $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
   (b) Enuncie o Teorema da Função Implícita para uma função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
   (c) Utilizando o teorema enunciado em (a) prove o teorema enunciado em (b).

2. (a) Enuncie o Teorema da Função Inversa para uma função $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
   (b) Enuncie o Teorema da Função Implícita para uma função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
   (c) Utilizando o teorema enunciado em (a), prove o teorema enunciado em (b).

3. Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por,

$$F(x, y) = (u, v) \text{ com } (u, v) = (x^4 y + x, x + y^3).$$

   (a) Mostre que F é inversível em uma vizinhança do ponto $(1, 1)$ [isto é, em um aberto que contém o ponto $(1, 1)$] e que sua função inversa G é de classe C^1 em uma vizinhança do ponto $F(1, 1) = (u_0, v_0)$. Determine (u_0, v_0).
   (b) Determine $\frac{\partial G}{\partial u}(u_0, v_0)$.

4. Suponha que as três equações: $F(u, v) = 0$, $u = xy$, e $v = \sqrt{x^2 + z^2}$ definem uma superfície no espaço tri-dimensional $Oxyz$. Determine o vetor normal a esta superfície no ponto $x = 1$, $y = 1$, $z = \sqrt{3}$, sabendo que $\frac{\partial F}{\partial u}(1, 2) = 1$ e $\frac{\partial F}{\partial v}(1, 2) = 2$.

5. As três equações

$$\begin{cases} x^2 - y\cos(uv) + z^2 & = 0 \\ x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 & = 2 \\ xy - (\sin u)(\cos v) + z & = 0\,, \end{cases}$$

   definem x, y e z, como funções de u e v. Calcule as derivadas parciais

$$\frac{\partial x}{\partial u} \text{ e } \frac{\partial x}{\partial v}$$

   no ponto $x = y = 1$, $u = \frac{\pi}{2}$, $v = 0$, $z = 0$.

6. Determine o ponto do plano $3x+2y+z = 12$ cuja soma dos quadrados das distâncias aos pontos $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$ seja mínima.

7. Ache os pontos de máximo e de mínimo da função $F(x, y, z) = x + 2y + z$, com a restrição $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$.

8. Determine o ponto do elipsóide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$ que maximiza a soma $x + 2y + z$.

9. Determine o ponto do plano $x + 2y - 3z = 4$ mais próximo da origem.

10. Determine o ponto da reta r, abaixo, que está mais próximo da origem:

$$r : \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$$

11. Maximize $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sujeita às restrições $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x + y + z = 1$.

12. Ache um ponto P na elipse $x^2 + 2y^2 = 6$ e um ponto Q na reta $x + y = 4$ tais que a distância de P a Q é mínima.

13. Estude, com relação a máximo e mínimo, a função $f(x, y) = y^2 - x^2$ restrita ao disco compacto $K = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\Big\}$.

14. Estude, com relação a máximos e mínimos, e com a restrição $x^2 + 2y^2 = 1$, a função

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 \ .$$

15. Considere a função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}$ e as restrições

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad \text{e} \quad x + y - z = 0.$$

(a) Existem o máximo e o mínimo de f sujeita tais restrições? Justifique.

(b) Determine, se existirem, os pontos de máximo e mínimo e seus valores.

16. Ache os pontos mais afastados da origem e com coordenadas sujeitas às restrições

$$x^2 + 4y^2 + z^2 = 4 \quad \text{e} \quad x + y + z = 1 \ .$$

17. Determine o ponto do plano $3x + 2y + z = 12$ minimizando a soma dos quadrados das distâncias aos pontos $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$.

18*. Determine os pontos de máximo e mínimo absoluto da função

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y$$

sobre o compacto $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \ \text{ e } \ z \geq 1\}$.

19*. Estude com relação a máximos e mínimos locais, e **pontos de sela**, a função

$$F(x,y,z) = \frac{x^5}{5} + y^4 + z^4 - \frac{x^3}{3} - 2y^2.$$

20. Determine o paralelepípedo-retângulo de volume máximo, com arestas paralelas aos eixos, inscrito no elipsóide

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1.$$

21. Determine as distâncias máxima e minima da origem à curva $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.

22. Determine entre os pontos da curva dada pela intersecção das superfícies

$$x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = 1,$$

os que estão mais próximos da origem.

23. Seja $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy + z^2 = 1; x^2 + y^2 = 1\}$.

    (a) Verifique que M é compacto.

    (b) Ache os pontos de M mais próximos e os mais distantes, ambos da origem.

24. Seja $M = \{f(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^4 = 1 \text{ e } x^2 - yz = 0\}$.

    (a) Verifique que M é compacto.

    (b) Encontre os pontos de M que maximizam a cota z.

25*. Sejam $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$. Determine o valor máximo de

$$F(x,y,z) = x^a y^b z^c \text{ sob a condição } x + y + z = 1, \text{ com } x > 0, y > 0 \text{ e } z > 0.$$

26*. Sejam $p > 0$ e $q > 0$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Seja $c > 0$. Sejam x e y variáveis positivas.

(a) Ache o valor mínimo de $f(x,y) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ sobre a hipérbole $xy = c$.

(b) Mostre a desigualdade

$$\textbf{(Hölder)} \qquad xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}, \quad \text{para quaisquer } x \geq 0 \text{ e } y \geq 0.$$

27*. Seja $X = [x_{ij}] \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, com linhas X_1, X_2 e X_3. Mostre a desigualdade

$$\textbf{(Hadamard)} \qquad \det X \leq |X_1||X_2||X_3|, \text{ onde } |X_i| \text{ é a norma usual de } X_i \,.$$