$2^{\underline{a}}$ Lista de MAT216 - Cálculo III - IFUSP
$1^{\underline{o}}$ semestre de 2014
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1. Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^2$, $g = g(u,v) : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em todo ponto de Ω e $F = F(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em todo ponto de $\mathbb{R}^3$. Suponhamos o gráfico de g contido numa superfície de nível de F.

   Mostre que se $P_0 \in \mathrm{Gr}(g)$ (o gráfico de g) e $\vec{\nabla} f(P_0) \neq \vec{0}$ então:

   $$\vec{\nabla} f(P_0) \ \text{ é ortogonal ao plano tangente ao gráfico de } g \text{ no ponto } P_0.$$

2. A função diferenciável $z = f(x,y)$ é dada implicitamente por $x^3 + y^3 + z^3 = 10$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,1,f(1,1))$.

3. Um campo de forças $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$, com P e Q funções definidas num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, é dito **conservativo** se existe um campo escalar $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que
   $$\vec{\nabla}\varphi(x,y) = \vec{F}(x,y) \ \text{ em } \Omega \ .$$
   Uma tal função φ, quando existe, chama-se **função potencial** associada ao campo $\vec{F}$. Verifique se são conservativos os campos abaixo (justifique):

   $$(a)\ \vec{F}(x,y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} \qquad (b)\ \vec{F} = y\,\vec{i} - x\,\vec{j} \qquad (c)\ \vec{F}(x,y) = \frac{x\,\vec{i} + y\,\vec{j}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\ .$$

4. Seja $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ um campo de forças com P e Q funções contínuas no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \Omega$, para todo $t \in [a,b]$, uma curva de classe C^1, com $\gamma(a) = \gamma(b)$ [γ é então dita **curva fechada**]. Mostre que se o campo $\vec{F}$ é conservativo então,
   $$\int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = 0\ .$$

5. Seja $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j} = \frac{-y}{x^2 = y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}\ ,\ (x,y) \neq (0,0)$.
   (a) Verifique
   $$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,,\quad \forall (x,y) \neq (0,0)\ .$$
   (b) Compute $\int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$, onde $\gamma(t) = (\cos t\,, \sin t)\,, t \in [0, 2\pi]$.
   (c) $\vec{F}$ é conservativo ? Por que?

6. Seja $\overrightarrow{F}(x,y) = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}$ um campo de forças com P e Q funções contínuas no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Se o campo $\overrightarrow{F}$ é conservativo, então existe uma função escalar $U(x,y)$ definida em Ω satisfazendo

$$\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\nabla} U \quad \text{em } \Omega.$$

Denominamos U **função energia potencial** associada ao campo vetorial $\overrightarrow{F}$. Determine, caso exista, a função energia potencial associada ao campo $\overrightarrow{F}$ dado e satisfazendo a condição dada.

   (a) $\overrightarrow{F}(x,y) = -6x\overrightarrow{i} - 2y\overrightarrow{j}$ e $U(0,0) = 0$.

   (b) $\overrightarrow{F}(x,y) = x\overrightarrow{i} - xy\overrightarrow{j}$ e $U(0,0) = 1000$.

7. a) Use a regra da cadeia para determinar $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$, onde $\begin{cases} z = z(x,y) = e^x \cos y \\ x = x(t,s) = ts \\ y = y(t,s) = \sqrt{t^2+s^2} \end{cases}$.

   b) Verifique, para o ítem a), a fórmula abaixo (uma Regra da Cadeia).

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial s} \end{bmatrix}_{1\times 2} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix}_{1\times 2} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

8. (Coordenadas polares) Seja $z = f(x,y)$, onde $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$.

   (a) Determine $\frac{\partial z}{\partial r}$ e $\frac{\partial z}{\partial \theta}$.

   (b) Mostre que $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$.

   (c) Analogamente ao Exercício anterior, escreva para este Exercício a fórmula matricial relacionando as derivadas .