CÁLCULO III - MAT 216 - IFUSP- Semestre 1 de 2014

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

http://www.ime.usp.br/~oliveira oliveira@ime.usp.br

INTEGRAL DUPLA: TEOREMA DE FUBINI E TEOREMA DE MUDANÇA DE VARIÁVEIS

Definições.

- **Partição.** Sejam $a, b, c,$ e d quatro números reais. Consideremos no plano cartesiano Oxy o retângulo

$$R = [a,b] \times [c,d] = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b \text{ e } c \le y \le d\right\}.$$

Consideremos também as partições arbitrárias

$$\begin{cases} \mathcal{P}_1 = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}, \text{ do intervalo } [a,b], \text{ e} \\ \mathcal{P}_2 = \{c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d\}, \text{ do intervalo } [c,d]. \end{cases}$$

O conjunto $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 = \left\{(x_i, y_j) : 0 \le i \le n \text{ e } 0 \le j \le m\right\}$ é dito uma partição do retângulo R. A partição $\mathcal{P}$ divide R em nm sub-retângulos

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \text{ com } 1 \le i \le n \text{ e } 1 \le j \le m.$$

Dizemos que cada sub-retângulo R_{ij} é um sub-retângulo da partição $\mathcal{P}$. A área de R_{ij} é $m(R_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j$, onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$.

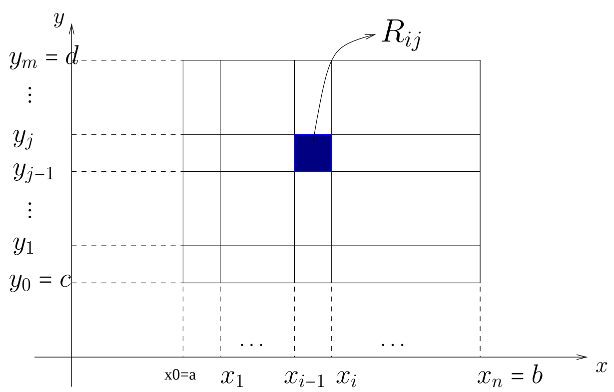


Figura 1: Ilustração à partição $\mathcal{P}$.

- **Somas de Darboux.** Seja $f : R \to \mathbb{R}$ uma função limitada (esta hipótese é importante na definição da integral de Riemann). Para cada sub-retângulo R_{ij} da partição $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ consideremos

  $$M_{ij} = \sup_{R_{ij}} f = \sup\{f(X) : X \in R_{ij}\} \text{ e } m_{ij} = \inf_{R_{ij}} f = \inf\{f(X) : X \in R_{ij}\}.$$

  As somas superior e inferior de f relativas à partição $\mathcal{P}$ são, em ordem,

  $$S(f;P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij} m(R_{ij}) \ \text{ e } \ s(f;P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij} m(R_{ij}).$$

- **Refinamento de uma Partição.** Dizemos que uma partição $\mathcal{P}'$ do retângulo R é um refinamento de uma partição $\mathcal{P}$ de R se $\mathcal{P}'$ contém $\mathcal{P}$. Isto é, se $\mathcal{P}'$ é uma partição de R que contém todos os pontos de $\mathcal{P}$ (e possivelmente outros pontos). Cada sub-retângulo de $\mathcal{P}'$ está contido em algum sub-retângulo de $\mathcal{P}$. Dizemos que $\mathcal{P}'$ é mais fina que $\mathcal{P}$.

Observação. Sejam $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_1' \times \mathcal{P}_2'$ partições de R. É fácil ver que se $\mathcal{P}'$ refina $\mathcal{P}$ então a partição $\mathcal{P}_1'$ refina $\mathcal{P}_1$ e a partição $\mathcal{P}_2'$ refina $\mathcal{P}_2$. Em geral, a partição $\mathcal{P}'' = (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_1') \times (\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_2')$ refina as partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$.

Fixemos uma função limitada $f : R \to \mathbb{R}$, com R um retângulo fechado e limitado. Mostramos abaixo que ao refinarmos uma partição de R então, a soma inferior cresce e a soma superior decresce. Mostramos também que qualquer soma inferior de f relativa à qualquer partição de R é menor ou igual a qualquer soma superior de f relativa à qualquer partição de R.

Lema 1. *Seja $f : R \to \mathbb{R}$ limitada. Sejam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ duas partições de R.*

(a) Se $\mathcal{P}'$ é mais fina que $\mathcal{P}$ então

$$s(f;\mathcal{P}) \le s(f;\mathcal{P}') \quad e \quad S(f;\mathcal{P}') \le S(f;\mathcal{P}).$$

(b) $s(f;\mathcal{P}') \le S(f;\mathcal{P})$.

Prova.

(a) Indiquemos por R_{ij} os sub-retângulos da partição $\mathcal{P}$ e por R'_{kl} os sub-retângulos de $\mathcal{P}'$. Fixemos um arbitrário R_{ij}, que se encontra subdividido em uma coleção de sub-retângulos R'_{kl} (vide Figura 2). Fixemos um tal índice kl. Temos,

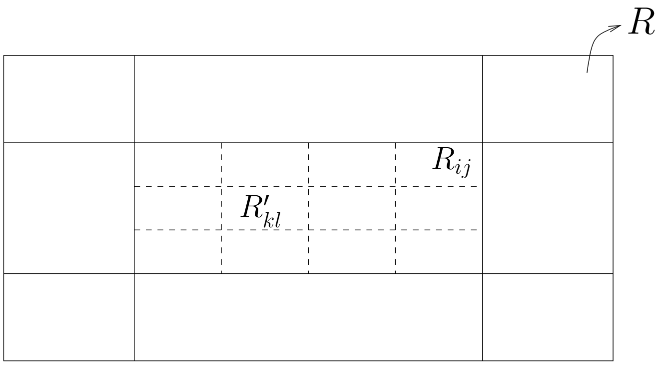


Figura 2: Ilustração ao Lema 1.

$$m_{ij} = \inf f(R_{ij}) \le m'_{kl} = \inf f(R'_{kl}) \le M'_{kl} = \sup f(R'_{kl}) \le \sup f(R_{ij}) = M_{ij}.$$

Logo, $m_{ij}m(R'_{kl}) \le m'_{kl}m(R'_{kl}) \le M'_{kl}m(R'_{kl}) \le M_{ij}m(R'_{kl})$. Donde, efetuando o somatório sobre tais índices kl obtemos as desigualdades

$$m_{ij}m(R_{ij}) \le \sum m'_{kl}m(R'_{kl}) \le \sum M'_{kl}m(R'_{kl}) \le M_{ij}m(R_{ij}).$$

Donde, computando o somatório sobre todos os índices ij obtemos as desigualdades $s(f;\mathcal{P}) \le s(f;\mathcal{P}') \le S(f;\mathcal{P}') \le S(f;\mathcal{P})$.

(b) Seja $\mathcal{P}''$ uma partição que refina $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ (vide observação acima). Pelo ítem (a) temos $s(f;\mathcal{P}') \le s(f;\mathcal{P}'') \le S(f;\mathcal{P}'') \le S(f;\mathcal{P})$ ■

Pelo Lema 1(b) segue que, fixada f, o supremo das somas inferiores é menor ou igual ao ínfimo das somas superiores.

Definição. Seja R um retângulo compacto em $\mathbb{R}^2$ e $f : R \to \mathbb{R}$ limitada. A integral inferior de f e a integral superior de f são, respectivamente,

$$\underline{\iint} f(x,y)dxdy = \sup\Big\{s(f;\mathcal{P}) : \ \mathcal{P} \text{ é partição de } R\Big\} \text{ e}$$

$$\overline{\iint} f(x,y)dxdy = \inf\Big\{S(f;\mathcal{P}) : \ \mathcal{P} \text{ é partição de } R\Big\}.$$

Dizemos que f é integrável (Riemann-integrável) se as integrais inferior e superior de f são iguais. A integral de f sobre R é tal valor, denotado

$$\iint_R f(x,y)dxdy.$$

Teorema 2. *Seja $f : R \to \mathbb{R}$ limitada. Então, f é integrável se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe uma partição $\mathcal{P}$ de R tal que*

$$0 \le S(f;\mathcal{P}) - s(f;\mathcal{P}) < \epsilon.$$

Prova.

($\Leftarrow$) Segue de $s(f;\mathcal{P}) \le \sup\limits_{\text{partições}} \{\, s(f;\mathcal{Q})\,\} \le \inf\limits_{\text{partições}} \{\, S(f;\mathcal{Q})\,\} \le S(f;\mathcal{P})$.

($\Rightarrow$) Seja $\epsilon > 0$. Pela hipóteses, existem duas partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ tais que

$$\begin{cases} \sup\{s(f;\mathcal{Q})\} - \epsilon/2 < s(f;\mathcal{P}) \le \sup\{s(f;\mathcal{Q})\}, \\ \inf\{S(f;\mathcal{Q})\} \le S(f;\mathcal{P}') < \inf\{S(f;\mathcal{Q})\} + \epsilon/2, \\ \text{com } \sup\{s(f;\mathcal{Q})\} = \inf\{S(f;\mathcal{Q})\}. \end{cases}$$

Logo, $0 \le S(f;\mathcal{P}') - s(f;\mathcal{P}) < \epsilon$. Seja $\mathcal{P}''$ uma partição que refina $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$. Pelo Lema 1 temos $s(f;\mathcal{P}) \le s(f;\mathcal{P}'') \le S(f;\mathcal{P}'') \le S(f;\mathcal{P}')$. Donde concluímos que $0 \le S(f;\mathcal{P}'') - s(f;\mathcal{P}'') < \epsilon$ ∎

PROPRIEDADES DA INTEGRAL

Proposição 3. *Sejam f e g integráveis em R e λ em $\mathbb{R}$. Então,*

- *$f+g$ é integrável e*
$$\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]dxdy = \iint_R f(x,y)dxdy + \iint_R g(x,y)dxdy.$$
- *λf é integrável e*
$$\iint_R [\lambda f(x,y)]dxdy = \lambda \iint_R f(x,y)dxdy.$$
- *Se $f \geq 0$ então $\iint_R f(x,y)dxdy \geq 0$.*
- *Se $f \geq g$ então $\iint_R f(x,y)dxdy \geq \iint_R g(x,y)dxdy$.*

Prova.

A quarta propriedade segue das três primeiras. A terceira é óbvia. Deixamos a segunda (a qual é trivial) ao leitor. Mostremos a primeira.

Notemos que se S é um sub-retângulo do retângulo R então,

$$\inf_S f + \inf_S g \leq \inf_S (f+g) \quad \text{e} \quad \sup_S (f+g) \leq \sup_S f + \sup_S g. \tag{3.1}$$

Sejam $\mathcal{P}, \mathcal{P}', \mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ quatro partições arbitrárias de R. Seja $\mathcal{P}''$ uma partição refinando $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$. Seja $\mathcal{Q}''$ refinando $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$. Pelo Lema 1 e por (3.1) temos,

$$s(f;\mathcal{P}) + s(g;\mathcal{P}') \leq s(f;\mathcal{P}'') + s(g;\mathcal{P}'') \leq s(f+g;\mathcal{P}'') \leq \underline{\iint}(f+g)$$

$$\leq \overline{\iint}(f+g) \leq S(f+g;\mathcal{Q}'') \leq S(f;\mathcal{Q}'') + S(g;\mathcal{Q}'') \leq S(f;\mathcal{Q}') + S(g;\mathcal{Q}).$$

Donde segue,

$$s(f;\mathcal{P}) + s(g;\mathcal{P}') \leq \underline{\iint}(f+g) \leq \overline{\iint}(f+g) \leq S(f;\mathcal{Q}') + S(g;\mathcal{Q}).$$

Computando na sequência de desigualdades acima, de forma ordenada e independente, o supremo sobre as partições $\mathcal{P}$, o supremo sobre as partições $\mathcal{P}'$, o ínfimo sobre as partições $\mathcal{Q}$ e o ínfimo sobre as partições $\mathcal{Q}'$ obtemos

$$\iint_R f dxdy + \iint_R g dxdy \leq \underline{\iint}(f+g) \leq \overline{\iint}(f+g) \leq \iint_R f dxdy + \iint_R g dxdy.$$

Logo, $f+g$ é integrável e sua integral é a soma das integrais de f e g ∎

Para caracterizar as funções Riemann-integráveis é útil rever compacidade e continuidade e definir conjuntos de conteúdo nulo e de medida nula.

COMPACIDADE

Já destacamos anteriormente e reconheceremos ao longo deste livro, a importância dos conjuntos compactos. Todos os interessados em análise tem visto que é impossível seguir sem eles.
(Frechét 1928, *Espaces abstraits, p. 66)*

As definições e os resultados nesta seção admitem óbvios análogos em $\mathbb{R}^n$.

Definições e Notações.

- Dada uma sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^2$, e uma família ordenada de índices naturais distintos $\{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$ dizemos que a sequência $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (z_{n_1}, z_{n_2}, \ldots, z_{n_k}, ...)$ é uma subsequência da sequência (z_n).
- A sequência de conjuntos $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente se $X_n \subset X_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Analogamente, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente se $X_n \supset X_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Seja K contido em $\mathbb{R}^2$ e I um conjunto arbitrário de índices. Dizemos que $\bigcup_{i\in I} O_i$ é uma cobertura aberta de K se O_i é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$, para todo $i \in I$, e se $K \subset \bigcup_{i\in I} O_i$.
- Um ponto $p \in \mathbb{R}^2$ é um ponto de acumulação de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ se, para todo $\epsilon > 0$, o disco aberto $D(p;\epsilon)$ contém ao menos um ponto de X distinto de p.

Se p é um ponto de acumulação de X, no disco $D(p;1)$ existe um ponto x_1 de $X \setminus \{p\}$. Pelo mesmo motivo, no disco $D(p;r_2)$ de raio $r_2 = \min(1/2, |x_1 - p|)$ existe um ponto x_2 de $X \setminus \{p\}$. Iterando tal argumentação, construímos uma sequência (x_n) de pontos de $X \setminus \{p\}$ tal que x_n pertence ao disco $D(p;r_n)$ de raio $r_n = \min(1/n, |x_{n-1} - p|)$. Vemos assim que existe uma sequência (x_n) , de pontos distintos de $X \setminus \{p\}$, convergente a p. Consequentemente, para todo $\epsilon > 0$, o disco $D(p;\epsilon)$ contém infinitos pontos de $X \setminus \{p\}$.

Teorema 4. *Seja K um subconjunto de $\mathbb{R}^2$. São equivalentes:*

(a) Toda cobertura de K por conjuntos abertos tem subcobertura finita (Propriedade de Heine-Borel).

(b) K é fechado e limitado (Teorema de Heine, 1872 - Borel, 1895).

(c) Todo subconjunto infinito de K tem ponto de acumulação em K (Propriedade de Bolzano-Weierstrass).

(d) Toda sequência em K admite subsequência convergente em K. (Frechet, 1906 - Definição de espaço sequencialmente compacto).

Prova.

$(a) \Rightarrow (b)$

Dado $z \in K^c$, consideremos a sequência decrescente de discos fechados $\overline{D}(z;1/n)$, $n \in \mathbb{N}$. Claramente, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{D}(z;1/n) = \{z\}$ (vide Figura 3).

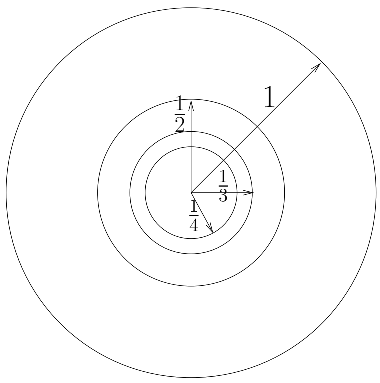


Figura 3: Ilustração 1 à prova do Teorema de Heine-Borel.

Passando ao complementar temos $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{D}(z;1/n)^c = \{z\}^c = \mathbb{R}^2 \setminus \{z\}$, uma óbvia cobertura de K pela reunião de uma sequência crescente de abertos. Por hipótese, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \overline{D}(z;1/N)^c$. Passando novamente ao complementar temos,

$$K^c \supset \overline{D}(z;1/N) \supset D(z;1/N) \supset \{z\}.$$

Logo, o complementar K^c é aberto e K é fechado.

Mostremos que K é limitado. Já que $K \subset \bigcup_{z\in K} D(z;1)$, segue que existem $z_1, ..., z_n$ em K tais que $K \subset D(z_1;1) \cup ... \cup D(z_n;1)$. É claro que $K \subset D\big(0; |z_1| + ... + |z_n| + 1\big)$ [vide Figura 4].

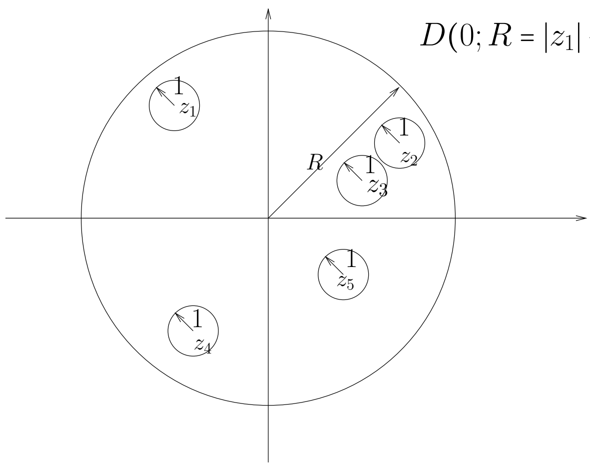


Figura 4: Ilustração 2 à prova do Teorema de Heine-Borel.

(b) $\Rightarrow (c)$

Seja Z um subconjunto infinito de pontos distintos de K. Seja Q_0 um quadrado fechado e limitado, com arestas de comprimento L, contendo K. É óbvio que Q_0 contém infinitos pontos de Z. Tendo construído o quadrado Q_n, com arestas de comprimento $L/2^n$, tal que $Q_n \cap Z$ é infinito procedemos dividindo Q_n em quatro sub-quadrados, com arestas de comprimento $L/2^{n+1}$, e escolhemos entre estes o sub-quadrado Q_{n+1} com infinitos pontos de K (vide Figura 5).

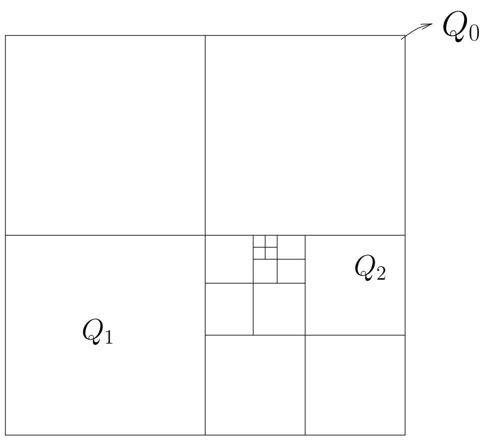


Figura 5: Esboço à prova da Propriedade de Bolzano-Weierstrass.

Temos então contruída por indução uma sequência de quadrados Q_n, $n \in \{0, 1, ..., \}$. Pelo Princípio dos Intervalos Encaixantes segue que $\bigcap Q_n = \{p\}$, p em $\mathbb{R}^2$. Toda bola aberta centrada em p contém um quadrado Q_n com infinitos pontos de Z. Logo, p é um ponto de acumulação de Z. Ainda, $p \in \overline{Z} \subset \overline{K} = K$.

(c) $\Rightarrow (d)$

Seja (z_n) uma sequência em K. Se $Z = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ é finito então, existe $J = \{n_1 < n_2 < ...\}$ tal que a subsequência (z_{n_k}) é constante e portanto convergente. Se Z é infinito, por hipótese Z tem um ponto de acumulação $z \in K$. Então, todo disco $D(z;r)$, $r > 0$, contém infinitos pontos de Z. Assim, é fácil ver que existem índices $n_1 < ... < n_k < ...$ tais que $z_{n_k} \in D(z; 1/k)$. Logo, a subsequência (z_{n_k}) converge a $z \in K$.

(d) $\Rightarrow (a)$

Seja O um aberto arbitrário em $\mathbb{R}^2$. Para cada $z \in O$, existe $n = n(z) \in \mathbb{N}$ tal que $D(z; 1/n) \subset O$. Então, como $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}^2$, segue que existe $w = w(z;n) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tal que $|w - z| < \frac{1}{2n}$. É fácil ver que $z \in D(w; \frac{1}{2n}) \subset O$ (vide Figura 6).

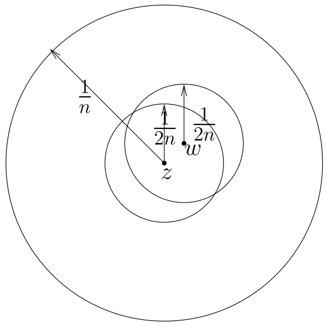


Figura 6: Ilustração à prova da Propriedade de Heine-Borel.

Logo, $O = \bigcup_{z \in O} D(w(z;n); \frac{1}{2n})$. Assim, todo aberto O é uma união enumerável de conjuntos da coleção enumerável $\mathcal{C} = \{D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots\}$ de discos abertos centrados em pontos de coordenadas racionais e de raio racional.

Desta forma dada $\bigcup_{j \in J} O_j$ uma cobertura de K por conjuntos abertos, podemos extrair dela uma subcobertura enumerável de K, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n$.

Trocando O_n por $O_1 \cup \cdots \cup O_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos supor, sem perder a generalidade, que (O_n) é uma sequência crescente de abertos. Suponhamos que $\bigcup_n O_n$ não admite uma subcobertura finita. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $z_n \in K \setminus O_n$. Por hipótese, a sequência (z_n) tem subsequência (z_{n_k}) convergente a $z \in K$. Assim, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $z \in O_N$. Logo, existe $n_k > N$ tal que $z_{n_k} \in O_N$. Por outro lado, por construção $z_{n_k} \notin O_{n_k}$ e $O_{n_k} \supset O_N$. Donde, $z_{n_k} \notin O_N$ ↯

A definição padrão para compacidade é a enunciada no Teorema 4 (a).

CONTINUIDADE

Em cursos de Cálculo em uma variável real é visto que a descontinuidade de uma função pode ser de primeira espécie, também dita de tipo "salto" (os limites laterais existem e são distintos), e de segunda espécie (ao menos um dos limites laterais não existe). Mostremos que dada $f : A \to \mathbb{R}$ limitada, $A \subset \mathbb{R}^2$, podemos medir sua continuidade/descontinuidade em pontos de A.

Definição. Para cada $\delta > 0$ sejam

$$M(a,f,\delta) = \sup\Big\{ f(x) : \ x \in A \text{ e } |x-a| < \delta \Big\}$$
$$m(a,f,\delta) = \inf\Big\{ f(x) : \ x \in A \text{ e } |x-a| < \delta \Big\}$$

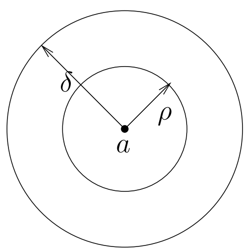


Figura 7: $0 < \rho < \delta \Rightarrow m(a,f,\delta) \le m(a,f,\rho) \le M(a,f,\rho) \le M(a,f,\delta)$.

Fixado a em A, é fácil ver que $M(a,f,\delta)$ é uma função decrescente quando $\delta \to 0$ e que $m(a,f,\delta)$ é uma função crescente quando $\delta \to 0$ (v. Fig. 7).

Assim, a diferença $M(a,f,\delta) - m(a,f,\delta)$ é decrescente quando $\delta \to 0$. Consequentemente, sempre existe a oscilação de f em a:

$$\operatorname{osc}(f,a) = \lim_{\delta \to 0} [M(a,f,\delta) - m(a,f,\delta)].$$

Proposição 5 (Propriedades da Oscilação). *São válidas,*

(i) f *é contínua em* a *se e somente se* $osc(f, a) = 0$.

(ii) *Dado* $\epsilon > 0$, *existe um aberto* $\mathcal{O}$ *em* $\mathbb{R}^2$ *tal que*

$$\Big\{a \in A : \; osc(f, a) < \epsilon\Big\} = \mathcal{O} \cap A.$$

(iii) *Se* A *é fechado então, para todo* $\epsilon > 0$, *é fechado o conjunto*

$$\Big\{a \in A : \; osc(f, a) \geq \epsilon\Big\}.$$

Prova.

(i) ($\Rightarrow$) Dado $\epsilon > 0$, por hipótese existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ se $|x - a| < \delta$ e $x \in A$. Logo, $M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta) \leq 2\epsilon$. Donde segue, $\operatorname{osc}(f, a) \leq 2\epsilon$ para qualquer $\epsilon > 0$. Logo, $\operatorname{osc}(f, a) = 0$.

($\Leftarrow$) Solicitamos ao leitor.

(ii) Fixemos a arbitrário em $A_\epsilon = \{a \in A : \; \operatorname{osc}(f, a) < \epsilon\}$. Então, existe $\delta = \delta_a > 0$ tal que $M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta) < \epsilon$. Ainda, para um ponto arbitrário $x \in B(a; \delta)$ e considerando o raio $r = \delta - |x - a| > 0$, é claro que temos $B(x; r) \subset B(a; \delta)$. Vide Figura 8.

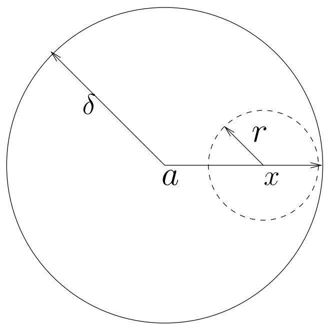


Figura 8: Ilustração à Propriedade da Oscilação

Portanto, para todo ponto $x \in B(a; \delta) \cap A$ é válida a desigualdade $M(x, f, r) - m(x, f, r) \leq M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta) < \epsilon$. Assim, para todo x na intersecção $B(a; \delta) \cap A$ temos $\operatorname{osc}(f, x) < \epsilon$. Finalmente, para a percorrendo A_ϵ, escolhemos $\mathcal{O} = \bigcup_{a \in A_\epsilon} B(a; \delta_a)$.

(iii) Basta notar que por (ii) temos $\{a \in A : \; \operatorname{osc}(f, a) \geq \epsilon\} = (\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}) \cap A$ ■

Observação. Seja D o conjunto de descontinuidades da função $f : A \to \mathbb{R}$, com f limitada. Dado $\epsilon > 0$, seja

$$D_\epsilon = \{a \in A : \operatorname{osc}(f, a) > \epsilon\}.$$

É fácil ver que

$$D = D_1 \cup D_{\frac{1}{2}} \cup D_{\frac{1}{3}} \cup ... \cup D_{\frac{1}{n}} \cup ... \ .$$

Definição. Uma função $f : A \to \mathbb{R}$, com A contido em $\mathbb{R}^2$, é *uniformemente contínua* se dado $\epsilon > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(a) - f(b)| < \epsilon \text{ se } |a - b| < \delta, \quad \text{onde } a \in A \text{ e } b \in A.$$

Teorema 6. *Consideremos $f : K \to \mathbb{R}$ contínua, com K compacto em $\mathbb{R}^2$. Então, f é uniformemente contínua.*

Prova. Por contradição.

Suponhamos existir $\epsilon > 0$ tal que qualquer que seja $\delta_n = 1/n$, existam pontos a_n e b_n, ambos em K, tais que

$$|a_n - b_n| < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad |f(a_n) - f(b_n)| > \epsilon.$$

Pelo Teorema 3(d), a sequência (a_n) contém uma subsequência (a_{n_k}) convergente a um ponto p em K. É fácil ver que $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 2$, $n_3 \geq 3$,.... Assim, temos $|a_{n_k} - b_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \leq \frac{1}{k}$, para todo k em $\mathbb{N}$. Então [reenumerando as subsequências (a_{n_k}) e (b_{n_k}) se necessário], podemos supor sem perda de generalidade que $|a_n - b_n| < \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e que (a_n) converge a p. Pela última desigualdade, a sequência $(a_n - b_n)$ converge a zero. Portanto, a sequência (b_n) também converge a p. Pela continuidade de f segue,

$$0 < \epsilon \leq \lim_{n \to +\infty} |f(a_n) - f(b_n)| = |f(p) - f(p)| = 0 \ ↯$$

CONTEÚDO NULO E MEDIDA NULA.

Definição. Seja D contido em R^n, com $n \in \{1, 2, 3\}$.

- D tem conteúdo nulo se, dado $\epsilon > 0$, existe uma coleção finita de retângulos compactos $R_1, R_2, .., R_k$ tais que $D \subset R_1 \cup ... \cup R_k$ e

$$\sum_{i=1}^{k} m(R_i) < \epsilon\,,$$

  com m(R_i) a *medida euclideana* (comprimento/área/volume) de R_i.

- D tem medida nula se, dado $\epsilon > 0$, existe uma coleção enumerável de retângulos compactos $R_1, R_2, .., R_k, ...$ tais que $D \subset R_1 \cup ... \cup R_k \cup ...$ e

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} m(R_i) \leq \epsilon \text{ [isto é, } m(R_1) + ... + m(R_k) \leq \epsilon\,,\ \forall k \in \mathbb{N}].$$

Nas definições acima de conteúdo nulo e de medida nula, se trocarmos a condição "retângulos compactos" pela condição "retângulos abertos e limitados" obtemos definições equivalentes às enunciadas. Verifique.

Exemplo 1. Seja $f : R \to \mathbb{R}$ integrável, com R um retângulo em $\mathbb{R}^2$. Então, Gr(f), o gráfico de f, tem conteúdo nulo em $\mathbb{R}^3$.

Solução. Utilizemos as notações para as somas de Darboux. Dado $\epsilon > 0$, pelo Teorema 2 existe uma partição de R em sub-retângulos R_{ij}, onde $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq l$, tais que

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \big(M_{ij} - m_{ij}\big) m(R_{ij}) < \epsilon.$$

A coleção de paralelepípedos $S_{ij} = R_{ij} \times [m_{ij}, M_{ij}]$ recobre Gr(f). Ainda,

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} m(S_{ij}) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} m(R_{ij})(M_{ij} - m_{ij}) < \epsilon \ \blacksquare$$

Exemplo 2. Mostre que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável então o gráfico de f tem conteúdo nulo no plano.

Lema 7. *Seja K compacto e de medida nula. Então, K tem conteúdo nulo.*

Prova.

Dado $\epsilon > 0$, seja $\{R_k : k \in \mathbb{N}\}$ uma coleção contável de retângulos abertos tal que $K \subset R_1 \cup R_2 ... \cup R_k \cup ...$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} m(R_k) \leq \epsilon/2$. Como K é compacto, existe N tal que $K \subset R_1 \cup R_2 \cup ... \cup R_N$. É óbvio que $m(R_1) + ... + m(R_N) \leq \epsilon/2 < \epsilon$ ■

Lema 8. *Seja X_1, X_2,...,X_j,... uma família contável (enumerável) de conjuntos de medida nula em $\mathbb{R}^2$. Então, $X = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} X_j$ tem medida nula.*

Prova. Seja $\epsilon > 0$. Como X_1 tem medida nula, segue que existe uma coleção contável de retângulos R_1^1, R_2^1, R_3^1,...,R_i^1,... satisfazendo:

$$X_1 \subset R_1^1 \cup R_2^1 \cup ... \cup R_i^1 \cup ... \quad \text{e} \quad \sum_i m(R_i^1) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Analogamente, fixado um índice j arbitrário em $\mathbb{N}$, existe uma coleção enumerável de retângulos R_1^j, R_2^j,...R_i^j,... satisfazendo :

$$X_j \subset R_1^j \cup R_2^j \cup ... \cup R_i^j \cup ... \quad \text{e} \quad \sum_i m(R_i^j) \leq \frac{\epsilon}{2^j}.$$

Então, como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é um conjunto contável, segue que a coleção de retângulos $\mathcal{C} = \{R_i^j : i \in \mathbb{N} \text{ e } j \in \mathbb{N}\}$ é contável. Ainda mais, é trivial ver que qualquer subcoleção finita de retângulos em $\mathcal{C}$ está contida em alguma sub-coleção finita do tipo $\{R_i^j : 1 \leq i \leq N \text{ e } 1 \leq j \leq N\}$, para N suficientemente grande. Também é fácil ver que

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} m(R_i^j) = \sum_{i=1}^{N} m(R_i^1) + \sum_{i=1}^{N} m(R_i^2) + ... + \sum_{i=1}^{N} m(R_i^N) \leq$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} + ... + \frac{\epsilon}{2^N} = \epsilon \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^N} \right) < \epsilon.$$

Consequentemente obtemos

$$\sum_{i,j} m(R_i^j) \leq \epsilon.$$

Logo, X tem medida nula ■

Teorema 9 (Caracterização - Lebesgue). *Seja $f : R \to \mathbb{R}$ limitada, com R um retângulo fechado e limitado. Seja D o conjunto dos pontos de descontinuidade de f. Então, f é integrável se e só se D tem medida nula.*

Prova.

($\Rightarrow$) Já vimos que $D = D_1 \bigcup D_{\frac{1}{2}} \bigcup ... \bigcup D_{\frac{1}{n}} \bigcup ...$, $D_{\frac{1}{n}} = \{x : \mathrm{osc}(f; x) \geq 1/n\}$. Como a união enumerável de conjuntos de medida nula é um conjunto de medida nula, basta provarmos que cada $D_{\frac{1}{n}}$ tem medida nula. Fixemos n em $\mathbb{N}$.

Dado $\epsilon > 0$ arbitrário, seja $\mathcal{P}$ uma partição de R tal que

$$S(f; \mathcal{P}) - s(f; \mathcal{P}) < \frac{\epsilon}{n}.$$

Seja $\mathcal{S}$ a coleção dos retângulos R_{ij} em $\mathcal{P}$ que contém algum ponto de $D_{\frac{1}{n}}$ em seu interior. Para todo R_{ij} em $\mathcal{S}$ temos $M_{ij} - m_{ij} \geq \frac{1}{n}$. Logo,

$$\frac{1}{n} \sum_{R_{ij} \in \mathcal{S}} m(R_{ij}) \leq \sum_{R_{ij} \in \mathcal{S}} (M_{ij} - m_{ij}) m(R_{ij}) \leq S(f; P) - s(f; P) < \frac{\epsilon}{n}.$$

Donde, $\sum\limits_{R_{ij} \in \mathcal{S}} m(R_{ij}) < \epsilon$. É claro que $D_{\frac{1}{n}}$ está contido na união dos retângulos em $\mathcal{S}$ com a união das arestas dos retângulos em $\mathcal{P}$. Tais arestas são retângulos de área zero e assim, cobrimos $D_{\frac{1}{n}}$ por um número finito de retângulos cuja soma das áreas é menor que ϵ. Logo, $D_{\frac{1}{n}}$ tem medida nula.

($\Leftarrow$) Dado $\epsilon > 0$ temos que $D_\epsilon = \{x \in R : \ \mathrm{osc}(f, x) \geq \epsilon\}$ está contido em D e portanto tem medida nula. Pela Proposição 5 (iii) segue que D_ϵ é compacto. Então, pelo Lema 7, D_ϵ tem conteúdo nulo.

Consideremos uma quantidade finita de retângulos abertos R_1,...,R_l que recobre D_ϵ e tal que $m(R_1) + ... + m(R_l) < \epsilon$.

Seja x um ponto arbitrário em $R \smallsetminus (R_1 \bigcup ... \bigcup R_l)$. Temos $\mathrm{osc}(f, x) < \epsilon$. Logo, existe um retângulo aberto R_x centrado em x e de lados paralelos aos eixos tal que a oscilação de f em $R_x \cap R$ [isto é, $\sup\limits_{R_x \cap R} f - \inf\limits_{R_x \cap R} f$] é menor que ϵ. Então, como a reunião de tais retângulos abertos R_x recobre $K = R \smallsetminus (R_1 \bigcup ... \bigcup R_l)$, e K é compacto (pois fechado e limitado), temos que existem $R_{x_1}, ..., R_{x_m}$ tais que $K \subset R_{x_1} \bigcup ... \bigcup R_{x_m}$.

Seja $\mathcal{C}$ coleção de retângulos abertos $\{R_1, ..., R_l, R_{x_1}, ..., R_{x_m}\}$. É óbvio que R está contido na reunião dos retângulos em $\mathcal{C}$. Seja $\mathcal{P}$ uma partição de R tal que cada sub-retângulo S de $\mathcal{P}$ está contido em um dos retângulos da coleção $\mathcal{C}$. Separemos os sub-retângulos de $\mathcal{P}$ em duas coleções: $\mathcal{S}_1$ com os sub-retângulos contidos em algum R_j, onde $1 \le j \le l$, e $\mathcal{S}_2$ com os demais sub-retângulos de $\mathcal{P}$.

Sejam M_S e m_S o supremo e o infímo de f retrita a S, respectivamente. Seja M tal que $|f(x)| \le M$, para todo x em R. Notemos que, se S pertence a $\mathcal{S}_2$ então S está contido em algum sub-retângulo R_{x_j}, com $1 \le j \le m$, e temos $M_S - m_S < \epsilon$. Ainda, se $S \in \mathcal{S}_1$ então $M_S - m_S \le 2M$. Finalmente, concluímos que

$$
\begin{aligned}
S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) &= \sum_{S \in \mathcal{S}_1} (M_S - m_s) m(S) \ + \ \sum_{S \in \mathcal{S}_2} (M_S - m_s) m(S) \\
&\le 2M \sum_{j=1}^{l} m(R_j) \ + \ \epsilon \sum_{S \in \mathcal{S}_2} m(S) \\
&\le 2M\epsilon \ + \ \epsilon\, m(R) \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Corolário 10. *Sejam f e g integráveis em R. Valem as propriedades,*

(i) fg é integrável em R.

(ii) Suponhamos f positiva [isto é, $f \ge 0$]. Então, temos $\iint_R f dxdy = 0$ se e somente se f é nula com a possível exceção do conjunto de medida nula constituído por seus pontos de descontinuidade.

Prova.

(i) Sejam $D(fg)$, $D(f)$ e $D(g)$, os conjuntos dos pontos de descontinuidade de fg, f e g, respectivamente. É óbvio que $D(fg) \subset D(f) \bigcup D(g)$. Pelo Teorema 9 temos que $D(f)$ e $D(g)$ tem ambos medida nula. Então, pelo Lema 7, o conjunto $D(fg)$ tem medida nula. Pelo Teorema 9 concluímos a integrabilidade de fg.

(ii) (⇒) Seja (x_0, y_0) um ponto de continuidade de f. Então, existe um sub-retângulo não degenerado S [isto é, S tem área estritamente positiva], de R, com $f(x,y) \geq \frac{f(x_0,y_0)}{2}$ para todo $(x,y) \in S$. Logo,

$$0 \leq \frac{f(x_0,y_0)}{2} m(S) \leq \underline{\iint} f dxdy = \iint_R f = 0.$$

Portanto, $f(x_0,y_0) = 0$.

(⇐) Seja $\mathcal{P}$ uma partição arbitrária de R. Indiquemos por R_{ij} os sub-retângulos desta partição. Como o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tem medida nula, segue que f não é descontínua em todos os pontos de R_{ij}. Logo, f é contínua em ao menos um ponto de R_{ij}. Então, devido à hipótese, f é nula em tal ponto. Obtemos então, para a soma inferior de f em relação a tal partição, $s(f;\mathcal{P}) = \sum_{i,j} m_{ij} m(R_{ij}) = 0$. Como esta soma inferior é arbitrária e f é integrável, concluímos que a integral de f é zero ∎

INTEGRAÇÃO SOBRE NÃO RETÂNGULOS

Seja A um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^2$. A **função característica** de A é,

$$\chi_A(x,y) = \begin{cases} 1\,, & \text{se } (x,y) \in A \\ 0\,, & \text{se } (x,y) \notin A. \end{cases}$$

Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função limitada e R um retângulo arbitrário fechado e limitado que contém A. Qualquer que seja a definição de f em $R \setminus A$, temos $f(x,y)\chi_A(x,y) = f(x,y)$ se $(x,y) \in A$ e $f(x,y)\chi_A(x,y) = 0$ se $(x,y) \in R \setminus A$.

Introduzimos então a notação

$$\big(f\chi_A\big)(x,y) = \begin{cases} f(x,y)\,, & \text{se } (x,y) \in A \\ 0\,, & \text{se } (x,y) \in R \setminus A. \end{cases}$$

A função f é dita integrável em A se $f\chi_A$ é integrável em R. Indicamos, vide Figura 9,

$$\iint_A f dxdy = \iint_R f\chi_A dxdy.$$

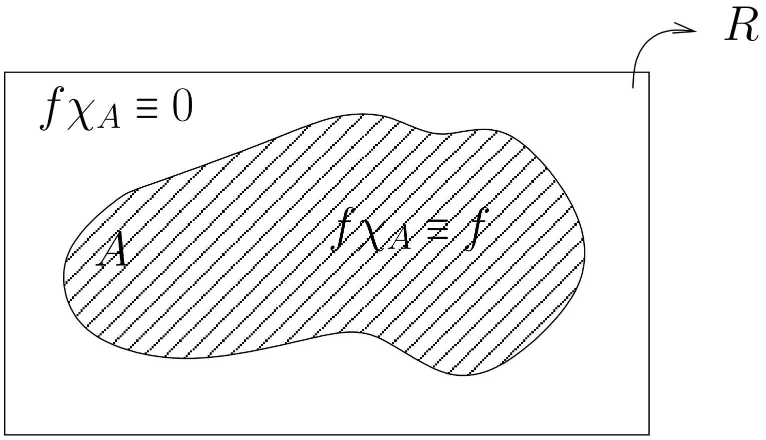


Figura 9: Ilustração à definição de $f : A \to \mathbb{R}$ integrável

Exercício. Verifique que a definição da integrabilidade, e da integral, de $f : A \to \mathbb{R}$ independem do particular retângulo compacto contendo A.

Proposição 11. *A função χ_A é integrável se e só se ∂A tem conteúdo nulo.*

Prova.

Notemos que $\overline{A} = \text{int}(A) \cup \partial(A)$. Portanto,

$$\mathbb{R}^2 = \text{int}(A) \cup \partial A \cup (\mathbb{R}^2 \smallsetminus \overline{A}).$$

É claro que χ_A é constante e contínua nos abertos $\text{int}(A)$ e $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \overline{A}$. Se $x \in \partial A$, toda bola aberta (não degenerada) centrada em x contém pontos em que $\chi_A = 1$, e pontos em que $\chi_A = 0$. Assim, o conjunto dos pontos de descontinuidade de χ_A é a fronteira de A.

Seja R um retângulo fechado e limitado tal que $\partial A \subset \overline{A} \subset \text{int}(R) \subset R$.

O conjunto dos pontos de descontinuidade de χ_A restrita a R é também ∂A [verifique]. Então, pelo Teorema 9, a função χ_A é integrável em R se e só se ∂A tem medida nula. Por fim, visto que ∂A é compacto, pelo Lema 7 segue que para ∂A são equivalentes ter medida nula ou conteúdo nulo■

Exercício. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ contínua e A um subconjunto limitado do plano com fronteira de conteúdo nulo. Mostre que f é integrável.

Como consequência das propriedades da integral sobre retângulos temos que dadas duas funções f e g integráveis em A e uma constante real λ então, as funções $f + g$ e λf são integráveis em A e valem as propriedades,

$$\iint_A [f(x,y) + g(x,y)]dxdy = \iint_A f(x,y)dxdy + \iint_A g(x,y)dxdy\,,$$

$$\iint_A \lambda f(x,y)dxdy = \lambda \iint_A f(x,y)dxdy \text{ e}$$

$$\iint_A f(x,y)dxdy \geq \iint_A g(x,y)dxdy\,, \text{ se } f \geq g.$$

Notação. Dado $X \subset \mathbb{R}^2$ e λ uma constante real, seja

$$\lambda X = \{\lambda x : x \in X\}.$$

Proposição 12. *Seja $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ uma curva de classe C^1 por partes. Então, a imagem de γ tem conteúdo nulo.*

Prova. É fácil ver que podemos supor que $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ é C^1 em todo o intervalo $[0,1]$. Como a função $\gamma'(t)$ é contínua e limitada, vemos que a imagem de γ' está contida em algum quadrado $Q = [-r,r] \times [-r,r]$, com $r > 0$. Pelo teorema do valor médio, fixados $0 \leq t \leq s \leq 1$ segue que existem ξ_1 e ξ_2, ambos no intervalo $[t,s]$, tais que $\gamma(s) - \gamma(t) = (s-t)(x'(\xi_1), y'(\xi_2))$. Logo,

$$(12.1) \qquad \gamma(s) \text{ pertence ao conjunto } \gamma(t) + (s-t)Q.$$

A seguir, dado n arbitrário em $\mathbb{N}$, consideremos a partição $\mathcal{P} = \big\{0, \frac{1}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\big\}$ do intervalo $[0,1]$ e os n sub-intervalos $[j/n, (j+1)/n]$, com $j \in \{0, ..., n-1\}$. Fixemos um tal j. Dado s no intervalo $[j/n, (j+1)/n]$, por (12.1) temos que o ponto $\gamma(s)$ pertence ao conjunto $\gamma\big(\frac{j}{n}\big) + \big(s - \frac{j}{n}\big)Q$. Desta forma, definindo $P_j = \gamma\big(\frac{j}{n}\big)$ e observando que $\big(s - \frac{j}{n}\big)Q \subset \frac{1}{n}Q$, concluímos que

$$\gamma(s) \in P_j + \frac{1}{n}Q\,, \text{ para todo } s \text{ em } [j/n, (j+1)/n].$$

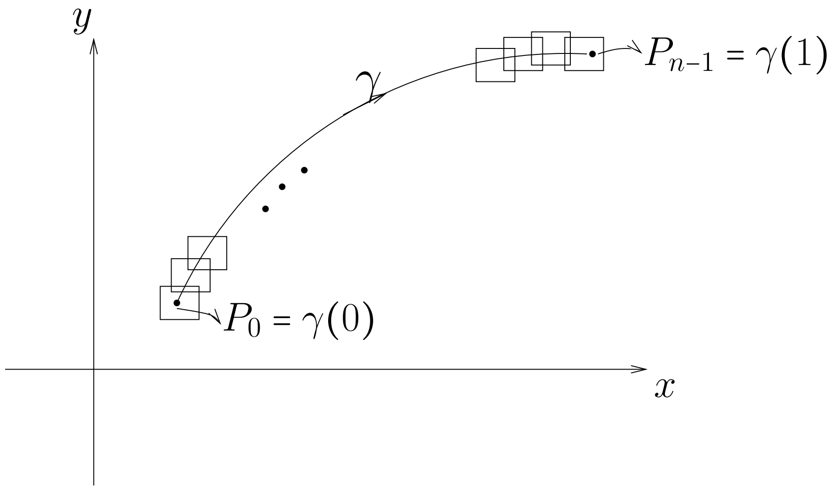


Figura 10: Ilustração à Proposição 12

Assim, a imagem de γ está contida na reunião dos retângulos $R_j = P_j + \frac{1}{n}Q$ (transladados do retângulo $\frac{1}{n}Q$), j percorrendo $\{0, ..., n-1\}$. Vide Fig. 10.

É fácil ver que

$$m(R_0) + ... + m(R_{n-1}) = n\left(\frac{2r}{n}\right)^2 = \frac{4r^2}{n}.$$

Desta forma, é trivial concluir que a imagem de γ tem conteúdo zero ∎

Definição. Seja A limitado em $\mathbb{R}^2$, com fronteira de conteúdo nulo.

$$\text{A área de } A \text{ é } m(A) = \iint_A dxdy.$$

Lema 13. *Seja A um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^2$. Então,*

(i) A tem conteúdo nulo se somente se $\overline{A}$ tem conteúdo nulo

(ii) Se A tem conteúdo nulo então, ∂A tem conteúdo zero.

(iii) A tem conteúdo nulo se e somente se A tem área zero.

(iv) Suponhamos que ∂A tem conteúdo nulo. Então, temos $m(A) > 0$ se e somente se A contém um retângulo não degenerado.

(v) Se A tem área zero então, para toda função limitada $f : A \to \mathbb{R}$ temos

$$\iint_A f(x,y)dxdy = 0.$$

Prova.

(i) e (ii) Devido à inclusão $A \subset \overline{A}$, segue que se $\overline{A}$ tem conteúdo nulo então A também tem conteúdo nulo. Suponhamos a seguir que A tem conteúdo nulo. Então, dado $\epsilon > 0$, sejam $R_1, ..., R_N$ retângulos fechados e limitados satisfazendo $A \subset R_1 \cup ... \cup R_N$ e $m(R_1) + ... + m(R_N) < \epsilon$. É fácil ver que $\partial A \subset \overline{A} \subset R_1 \cup ... \cup R_N$. Logo, $\overline{A}$ e ∂A tem conteúdo nulo.

(iii) ($\Rightarrow$) Por (ii) e pela Proposição 11, a função χ_A é integrável. Com a notação na prova dos itens acima temos $\chi_A \leq \chi_{R_1} + ... + \chi_{R_N}$. Logo,

$$0 \leq \iint_A dxdy \leq \iint_{R_1} dxdy + ... + \iint_{R_N} dxdy = m(R_1) + ... + m(R_N) < \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é qualquer, segue $\iint_A dxdy = 0$. Logo, A tem área zero.

($\Leftarrow$) Sejam $\epsilon > 0$ e R um retângulo compacto contendo A. Temos, por hipótese, $\inf\{S(\chi_A; \mathcal{P}) : \mathcal{P}$ é partição de $R\} = 0$. Seja $\mathcal{P}$ uma partição de R, constituída por sub-retângulos R_{ij}, satisfazendo $S(\chi_A; \mathcal{P}) = \sum\limits_{i,j} M_{ij} m(R_{ij}) < \epsilon$, onde $M_{ij} = \sup\limits_{R_{ij}} \chi_A$ vale 0 ou 1. Consideremos a coleção de sub-retângulos $\mathcal{C} = \{R_{ij} : M_{ij} = 1\}$. É fácil ver que temos $A \subset \bigcup\limits_{R_{ij} \in \mathcal{C}} R_{ij}$ e $\sum\limits_{R_{ij} \in \mathcal{C}} m(R_{ij}) < \epsilon$.

(iv) ($\Rightarrow$) Seja R um retângulo compacto contendo A. Pelo Corolário 10 (i), a função positiva $\chi_A : R \to \mathbb{R}$ não é nula em algum ponto de continuidade. Logo, existe $a \in A$ no qual χ_A é contínua. Como χ_A assume apenas os valores 0 e 1, segue que existe um retângulo aberto S, contido em R e contendo a, tal que temos $\chi_A(x) = 1$, para todo $x \in S$. Isto é, o retângulo aberto S está contido em A.

($\Leftarrow$) Trivial.

(v) Seja R um retângulo fechado e limitado e contendo A. É fácil ver que $R = \text{int}(A) \mathbin{\dot\cup} \partial A \mathbin{\dot\cup} (R \setminus \overline{A})$. Em $R \setminus \overline{A} = R \cap \overline{A}^c$, a função $f\chi_A$ é nula e contínua [verifique, note que $\overline{A}^{\,c}$ é aberto]. Logo, os pontos de descontinuidade de $f\chi_A$ estão em $\text{int}(A) \mathbin{\dot\cup} \partial A$, que tem conteúdo nulo. Assim, $f\chi_A$ é integrável. Seja M tal que $-M \leq f(x,y) \leq M$, para todo (x,y) em A. Temos, $\iint_A (-M) dxdy \leq \iint_A f(x,y) dxdy \leq \iint_A M dxdy$. Donde concluímos que $\iint_A f(x,y) dxdy = 0$ ■

Comentários

- Seja $f : A \to \mathbb{R}$ integrável e ∂A de conteúdo nulo. Consideremos $B \subset A$ com B de conteúdo nulo. Vejamos que podemos trocar f sobre B por qualquer $g : B \to \mathbb{R}$ limitada sem alterarmos o valor da integral de f em A. Verifiquemos que $f + g\chi_B$, definida em A, é integrável e $\iint_A (f + g\chi_B)dxdy = \iint_A f dxdy$. De fato, basta ver que dado R um retângulo compacto contendo A (v. Fig. 11) então, pelo Lema 13 (v),

$$0 = \iint_B g dxdy = \iint_R g\chi_B dxdy = \iint_R g\chi_B\chi_A dxdy = \iint_A g\chi_B dxdy.$$

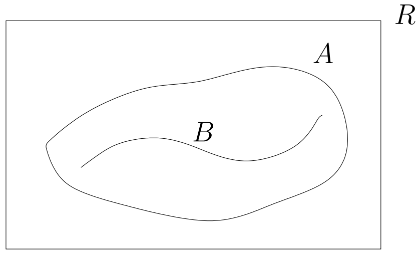


Figura 11: Ilustração ao comentário acima

- Dada uma função integrável, não podemos alterá-la livremente em um conjunto de medida nula e mantermos a integrabilidade. Seja f a função nula, integrável e contínua, no quadrado $Q = [0,1] \times [0,1]$. Então, $B = Q \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ é contável, denso em Q, e de medida nula (mostre). A função $\chi_B : Q \to \mathbb{R}$ (v. Fig 12) difere de f apenas sobre B. Mas, χ_B é descontínua em todo ponto e não é integrável.

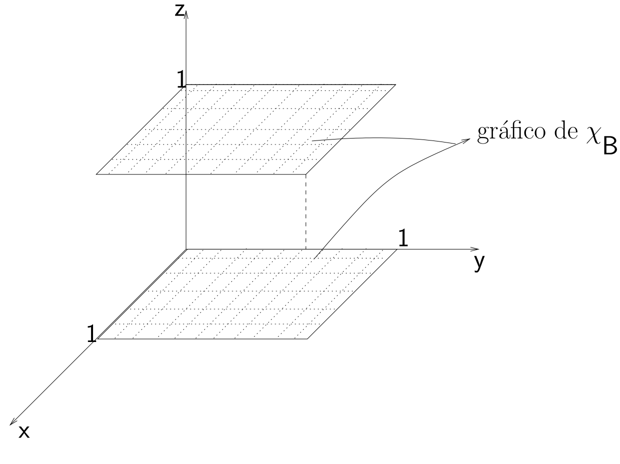


Figura 12: Ilustração ao gráfico da função χ_B

O TEOREMA DO VALOR MÉDIO PARA INTEGRAIS

Definição. Um subconjunto X de $\mathbb{R}^2$ é conexo por caminhos se dados dois pontos arbitrários p e q, ambos em X, então, existe uma curva contínua $\gamma : [0,1] \to X$ com ponto inicial $\gamma(0) = p$ e ponto final $\gamma(1) = q$ (v. Fig. 13).

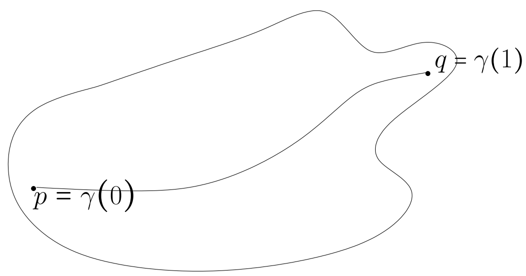


Figura 13: Ilustração a um conjunto conexo por caminhos

Lema 14. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com X um subconjunto conexo por caminhos de $\mathbb{R}^2$. Então, a imagem de f é um intervalo.*

Prova.

Seja c um número entre dois números $f(p)$ e $f(q)$, com p e q pontos em X. Por hipótese, existe uma curva contínua $\gamma : [0,1] \to X$ com $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. A função contínua $f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ satisfaz $f(\gamma(0)) = f(p)$ e $f(\gamma(1)) = f(q)$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, a imagem de $f \circ \gamma$ é um intervalo. Logo, existe $\bar{t} \in [0,1]$ tal que $f(\gamma(\bar{t})) = c$ ■

Teorema 15. *Seja $f : A \to \mathbb{R}$ integrável e contínua, com A conexo por caminhos e ∂A com conteúdo nulo. Então, existe $(\overline{x}, \overline{y})$ em A tal que*

$$\iint_A f(x,y)dxdy = f(\overline{x}, \overline{y}) m(A).$$

Prova.

Pela Proposição 11, o conjunto A tem área. Isto é, existe o número $m(A)$. Se $m(A) = 0$, pelo Lema 13 (v) segue $\iint_A f dxdy = 0$. Neste caso, qualquer $(\overline{x}, \overline{y})$ em A nos serve. Suponhamos, a seguir, $m(A) > 0$. Ressaltemos que, pelo Lema 13 (iv), o interior de A é não vazio. Evidentemente temos $\inf f(A) = m \le f(x,y) \le M = \sup f(A)$, para todo ponto (x,y) em A, e

$$m \le \frac{\iint_A f dxdy}{m(A)} \le M.$$

Analisemos três casos.

(i) Caso $m < \frac{\iint_A f dxdy}{m(A)} < M$. Por definição de ínfimo e supremo, existem (x_1, y_1) em A e (x_2, y_2) em A satisfazendo

$$f(x_1, y_1) < \frac{\iint_A f dxdy}{m(A)} < f(x_2, y_2).$$

Então, pelo Lema 14, o número $\frac{\iint_A f dxdy}{m(A)}$ pertence à imagem de f.

(ii) Caso $\frac{\iint_A f dxdy}{m(A)} = M$. Temos $\iint_A (M - f) dxdy = 0$, com $M - f$ uma função contínua e positiva [isto é, $M - f \geq 0$] e A um conjunto com interior não vazio. Pelo Corolário 10 (ii), a função $M - f$ é nula nos retângulos abertos contidos em A. Logo, qualquer $(\overline{x}, \overline{y})$ em $\text{int}(A)$ nos serve.

(iii) Caso $\frac{\iint_A f dxdy}{m(A)} = m$. Segue do caso (ii) aplicado à função $-f$ $\blacksquare$

TEOREMA DE FUBINI

Lema 16. *Seja f integrável no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Então, as funções definidas no intervalo $[a, b]$,*

$$\mathcal{I}(x) = \underline{\int} f(x, y) dy \quad e \quad \mathcal{S}(x) = \overline{\int} f(x, y) dy\,,$$

são integráveis e

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y) dxdy = \int_a^b \mathcal{I}(x) dx = \int_a^b \mathcal{S}(x) dx.$$

Prova.

Seja $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ uma partição de R, com $\mathcal{P}_1 = \{x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b\}$ e $\mathcal{P}_2 = \{y_0 = c < y_1 < ... < y_m = d\}$. Para i em $\{1, ..., n\}$ e j em $\{1, ..., m\}$, sejam $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, $m_{ij} = \inf f(R_{ij})$ e $M_{ij} = \sup f(R_{ij})$. Com tais notações temos,

$$s(f; \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij} m(R_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{m} m_{ij} \Delta y_j \right] \Delta x_i.$$

Fixado x em $[x_{i-1}, x_i]$, é fácil ver que $m_{ij} \le \inf_{y\in[y_{j-1},y_j]} f(x,y)$. Logo,

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta y_j \le \sum_{j=1}^{m}\left[\inf_{y\in[y_{j-1},y_j]} f(x,y)\right]\Delta y_j \le \underline{\int} f(x,y)dy = \mathcal{I}(x).$$

Donde, já que x é arbitrário em $[x_{i-1}, x_i]$, segue que

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta y_j\right]\Delta x_i \;\le\; \sum_{i=1}^{n}\left[\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} \mathcal{I}(x)\right]\Delta x_i = s(\mathcal{I},\mathcal{P}_1).$$

Isto é, mostramos $s(f;\mathcal{P}) \le s(\mathcal{I};\mathcal{P}_1)$. Trocando f por $-f$ encontramos $s(-f;\mathcal{P}) \le s(-\mathcal{S};\mathcal{P}_1)$. Donde segue, $S(\mathcal{S};\mathcal{P}_1) \le S(f;\mathcal{P})$. Resumindo, temos

$$s(f;\mathcal{P}) \le s(\mathcal{I};\mathcal{P}_1) \le S(\mathcal{I};\mathcal{P}_1) \le S(\mathcal{S};\mathcal{P}_1) \le S(f;\mathcal{P}).$$

Assim, como f é integrável, $\mathcal{I}$ é integrável e sua integral é igual à de f.

Trocando f por $-f$ temos que $-\mathcal{S}$ é integrável com mesma integral que $-f$ ■

Teorema (Fubini) 17. *Seja $f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ integrável.*

(i) Com a possível exceção de um conjunto de medida nula em $[a,b]$ e de um conjunto de medida nula em $[c,d]$, estão respectivamente bem definidas as integrais $\int_c^d f(x,y)dy$ e $\int_a^b f(x,y)dx$.

(ii) Definamos as integrais acima, nos subconjuntos em que elas não existem, como ou a respectiva função integral inferior ou a respectiva função integral superior. As funções assim obtidas, respectivamente definidas em $[a,b]$ e em $[c,d]$, são integráveis e satisfazem

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f\,dxdy = \int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy.$$

Prova. Pelo Lema 16 temos

$$\int_a^b\left[\overline{\int} f(x,y)dy - \underline{\int} f(x,y)dy\right]dx = 0,$$

com o integrando positivo. Portanto, existe um conjunto de medida nula $X \subset [a,b]$ tal que [vide Corolário 10 (ii)]

$$\underline{\int} f(x,y)dy = \overline{\int} f(x,y)dy = \int_c^d f(x,y)dy\,,\ \text{se } x \in [a,b]\setminus X.$$

Definamos $\int_c^d f(x,y)dy$, em X, como a função $\underline{\int} f(x,y)dy$, ou como a função $\overline{\int} f(x,y)dy$. Seja qual for a escolha, pelo Lema 16 temos (v. Fig. 14)

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx.$$

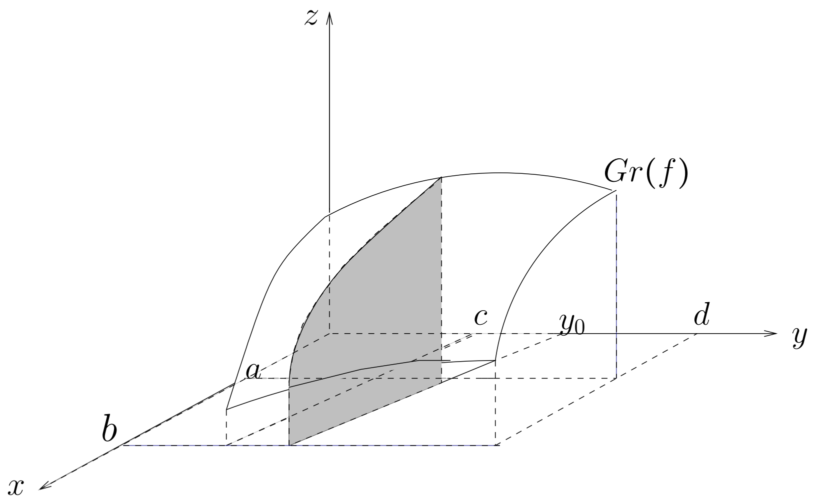


Figura 14: Ilustração ao Teorema de Fubini

Para finalizar, consideremos a função $g : [c,d] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(y,x) = f(x,y)$. É fácil ver que g é integrável, com mesma integral que f. Pelos fatos já provados temos

$$\begin{aligned}\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy &= \iint_{[c,d]\times[a,b]} g(y,x)dydx \\ &= \int_c^d \int_a^b g(y,x)dxdy \\ &= \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy \blacksquare\end{aligned}$$

Comentários. Mantenhamos a notação do teorema, e de sua prova, acima.

- Se X, o conjunto dos pontos de $[a,b]$ tais que não existe $\int_c^d f(x,y)dy$, tem conteúdo nulo então podemos definir tais integrais em tais pontos como qualquer valor real (por exemplo, zero). Evidentemente, segue uma observação análoga com respeito ao correspondente subconjunto $Y = \{y \in [c,d] : \text{ não existe } \int_a^b f(x,y)dx\}$.
- Se $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ é contínua então existem as integrais
$$\int_a^b f(x,y)dx, \ \forall y \text{ em } [c,d], \quad \text{e} \quad \int_c^d f(x,y)dy, \ \forall x \text{ em } [a,b].$$
- Chamamos de integrais iteradas de f às integrais
$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx \qquad \text{e} \qquad \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy.$$
- O teorema chamado "Fubinito" ou "Fubininho" ou "Baby Fubini" afirma apenas que, sob certas condições, temos
$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy.$$
- Se f é positiva [i.e., $f \geq 0$ em todo ponto] então o número
$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy$$
é o volume do subconjunto
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, \text{ e } 0 \leq z \leq f(x,y)\}.$$

Exercício. Sejam $c(x)$ e $d(x)$ duas funções contínuas em $[a,b]$ e tais que, para todo x em $[a,b]$ temos $c(x) \leq d(x)$. Seja

$$B = \{(x,y); a \leq x \leq b \text{ e } c(x) \leq y \leq d(x)\}.$$

Isto é, B é a região limitada pelos gráficos das funções $c = c(x)$ e $d = d(x)$ e as retas $x = a$ e $x = b$. Vide Figura 15.

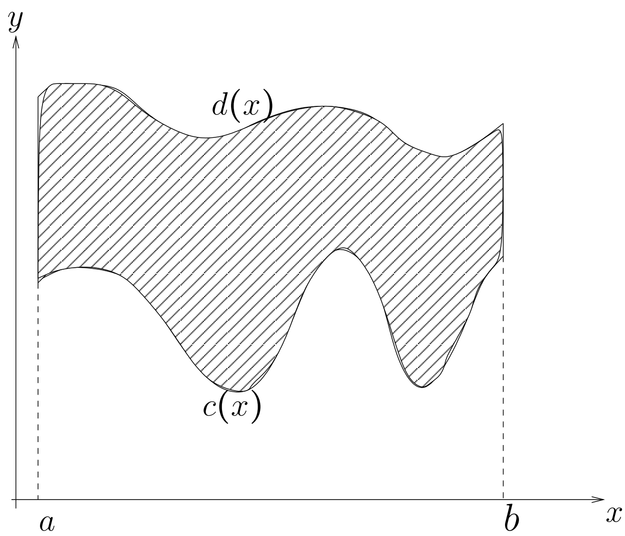


Figura 15: Ilustração ao exercício acima

Considere $f : B \to \mathbb{R}$ contínua. Verifique que

$$\iint_B f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy \right] dx.$$

Exercício. Enuncie e verifique um resultado análogo ao apresentado no exercício acima para duas funções contínuas $a(y)$ e $b(y)$ definidas em $[c,d]$. Faça um esboço.

MUDANÇA DE VARIÁVEL

Nesta seção motivamos o Teorema de Mudança de Variáveis em duas variáveis. Para tal apresentamos, na ordem abaixo,

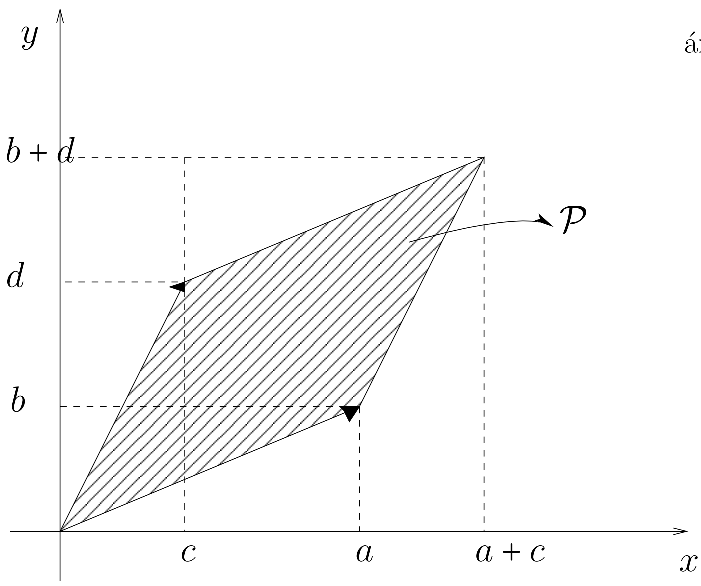
(1) Um esboço da demonstração usualmente encontrada em textos clássicos.

(2) Um enunciado razoavelmente geral, para este curso, do teorema.

(3) Uma demonstração bastante instrutiva de uma versão simplificada.

Uma prova no contexto da teoria da integração de Riemann requer uma razoável quantidade de cuidados, os quais são interessantes e importantes mas dispensáveis em um curso introdutório (vide referência [7]). Uma prova mais elegante pode ser dada com a teoria da integração de Lebesgue.

Observação. Sejam $\langle a, b\rangle$ e $\langle c, d\rangle$, vetores em $\mathbb{R}^2$, como na figura abaixo.



$$\begin{aligned}\text{área}(\mathcal{P}) &= \\ &= (a+c)(b+d) \\ &\quad -2\tfrac{c(2b+d)}{2} - 2\tfrac{ab}{2} \\ &= ad - bc \\ &= \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Figura 16: O Determinante e a Área de um Paralelogramo

Pela Figura 16, a área do paralelogramo determinado por $\langle a, b\rangle$ e $\langle c, d\rangle$ é o módulo do determinante 2×2 cujas colunas são dadas por tais vetores. Na figura acima, o determinante é positivo pois o conjunto ordenado $\{\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle\}$ é uma base ordenada positivamente orientada do plano.

(1) Esboço de uma Prova do Teorema de Mudança de Variável

Consideremos uma função $\varphi \in C^1(R;\mathbb{R}^2)$ inversível com inversa de classe C^1, onde $R = [a,b] \times [c,d]$ (i.e., φ é de classe C^1 em um aberto contendo R). Seja $B = \varphi(R)$ e $f : B \to \mathbb{R}$ contínua. Seja também $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$, com

$$\mathcal{P}_1 = \{u_0 = a < u_1 < ... < u_n = b\} \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_2 = \{v_0 = c < v_1 < ... < v_m = d\},$$

uma partição de R com sub-retângulos $R_{ij} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]$, tais que $i \in \{1,...,n\}$ e $j \in \{1,...,m\}$. Definamos $\Delta u_i = u_i - u_{i-1}$ e $\Delta v_j = v_j - v_{j-1}$. Introduzamos os conjuntos (vide Figura 17)

$$B_{ij} = \varphi(R_{ij}) = \Big\{(x,y) = \varphi(u,v) : (u,v) \in R_{ij}\Big\}.$$

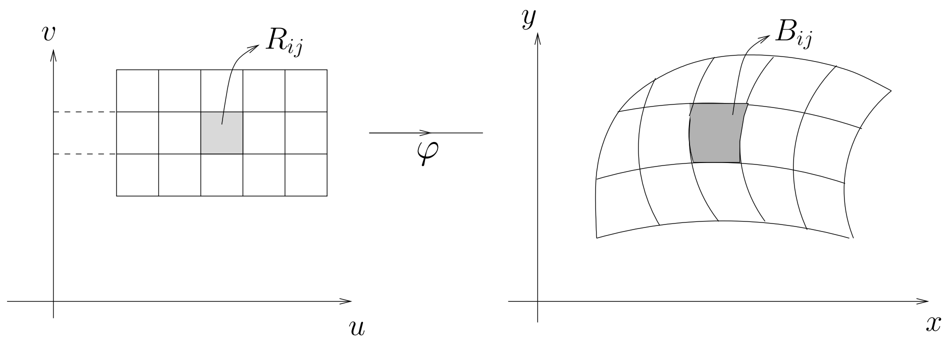


Figura 17: Ilustração ao Teorema de Mudança de Variável

Se a partição $\mathcal{P}$ é fina o suficiente então, a área de cada região $B_{ij} = \varphi(R_{ij})$ é aproximadamente a área do paralelogramo determinado pelos vetores

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_i, v_j)\Delta u_i \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_i, v_j)\Delta v_j.$$

Isto é,

$$\text{área}(B_{ij}) \approx \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_i, v_j) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_i, v_j) \right\| \Delta u_i \Delta v_j.$$

Escrevamos a função $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, segundo suas funções coordenadas. Desta forma, considerando a matriz jacobiana de φ temos

$$J\varphi(u_i, v_j) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}. \end{bmatrix} (u_i, v_j),$$

sendo que o determinante jacobiano é a área orientada do paralelogamo determinado pelos vetores $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_i, v_j)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_i, v_j)$.

Portanto, temos que

$$\text{área}(B_{ij}) \approx |\det J\varphi(u_i, v_j)|\Delta u_i \Delta v_j.$$

Introduzindo os pontos $(x_i, y_j) = \varphi(u_i, v_j)$ em B_{ij} temos

$$\sum_{i,j} f(x_i, y_j) m(B_{ij}) \approx \sum_{i,j} f\big(\varphi(u_i, v_j)\big)|\det J\varphi|(u_i, v_j)\Delta u_i \Delta v_j,$$

com o símbolo $\sum\limits_{i,j}$ indicando o somatório sobre todos os índices i e j dados. Graças a esta última aproximação é razoável esperar que, conforme a norma da partição $\mathcal{P}$ [isto é, o número $|\mathcal{P}| = \max\{\Delta u_1, ..., \Delta u_n, \Delta v_1, ..., \Delta v_m\}$] tende a zero, encontremos a identidade

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \iint_R f\big(\varphi(u, v)\big)|\det J\varphi(u, v)| du dv.$$

(2) O Teorema de Mudança de Variável na Integral Dupla

Teorema 18. *Seja $\varphi : K \to \mathbb{R}^2$, onde K é um compacto em $\mathbb{R}^2$ com fronteira de conteúdo nulo, de classe C^1 em um aberto contendo K. Suponhamos que $\varphi\big(int(K)\big) = int\big(\varphi(K)\big)$, com φ inversível em $int(K)$ e $\det J\varphi \neq 0$ em todo ponto em $int(K)$. Então, para toda $f : \varphi(K) \to \mathbb{R}$ integrável temos,*

$$\iint\limits_{\varphi(K)} f(x, y) dx dy = \iint\limits_K f(\varphi(u, v))|\det J\varphi(u, v)| du dv.$$

(3) Uma Versão Simplificada do Teorema de Mudança de Variáveis

Teorema 19 (P. Lax - 1999). *Seja $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ tal que $\varphi(x) = x$ para todo $|x|$ suficientemente grande. Então, para toda f em $C(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ e com suporte compacto temos*

$$\iint f\big(\varphi(u,v)\big)|(J\varphi)(u,v)|dudv = \iint f(x,y)dxdy,$$

onde $|(J\varphi)(u,v)|$ é o módulo do determinante da matriz $J\varphi(u,v)$.

Prova.

Provaremos tal resultado apenas para funções diferenciáveis. O caso f contínua segue por aproximações. Seja

$$g(x,y) = \int_{-\infty}^{x} f(t,y)dt.$$

É claro que $\frac{\partial g}{\partial x} = f$. Seja $c > 0$ tal que Suporte$(f) \subset Q = [-c,c] \times [-c,c]$ e $\varphi(u,v) = (u,v)$ se $(u,v) \notin Q$. É fácil ver que $g(x,y) = 0$ se $|y| \geq c$ ou $x \leq -c$. Seja $R > 0$ tal que $\varphi(u,v) = (u,v)$ se $|(u,v)| \geq R$. Assumamos $c > R$. Temos,

$$(19.1) \qquad \iint f\big(\varphi(u,v)\big)|J\varphi(u,v)|dudv = \iint\limits_{Q} \frac{\partial g}{\partial x}\big(\varphi(u,v)\big)|J\varphi(u,v)|dudv.$$

Escrevamos $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ segundo suas funções componentes. Pela regra da cadeia obtemos,

$$J(g \circ \varphi) = [\nabla g]_{1\times 2} \begin{bmatrix} \frac{\varphi_1}{\partial u} & \frac{\varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\varphi_2}{\partial u} & \frac{\varphi_2}{\partial v}. \end{bmatrix}_{2\times 2} = \Big[\frac{\partial g}{\partial x}\nabla\varphi_1 + \frac{\partial g}{\partial y}\nabla\varphi_2\Big]_{1\times 2}.$$

Graças a tal equação matricial e as regras usuais para determinantes segue

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial(g\circ\varphi)}{\partial u} & \frac{\partial(g\circ\varphi)}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}\nabla\varphi_1 + \frac{\partial g}{\partial y}\nabla\varphi_2 \\ \nabla\varphi_2 \end{vmatrix} = \frac{\partial g}{\partial x}\begin{vmatrix} \nabla\varphi_1 \\ \nabla\varphi_2 \end{vmatrix} = \frac{\partial g}{\partial x}\det(J\varphi).$$

Logo, encontramos a identidade

$$\frac{\partial g}{\partial x}\big(\varphi(u,v)\big)\det(J\varphi)(u,v) = \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}\partial_u(g\circ\varphi) \; - \; \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\partial_v(g\circ\varphi)$$

Substituindo tal expressão no lado direito de (19.1) obtemos

$$\iint f\big(\varphi(u,v)\big)|J\varphi(u,v)|dudv = \iint\limits_{Q} \Big[\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}\partial_u(g\circ\varphi) \; - \; \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\partial_v(g\circ\varphi)\Big]dudv \; .$$

Integrando por partes temos, já que $\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}(\pm c, v) = 1$ e $(g\circ\varphi)(c,v) = g(c,v)$,

$$\int_{-c}^{c}\Big[\int_{-c}^{c}\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}(u,v)\partial_u(g\circ\varphi)du\Big]dv =$$

$$= \int_{-c}^{c}\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}(u,v)(g\circ\varphi)(u,v)\Big|_{u=-c}^{u=+c} - \int_{-c}^{c}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial u\partial v}(u,v)(g\circ\varphi)(u,v)du\right]dv$$

$$= \int_{-c}^{c}[g(c,v)-g(-c,v)]dv \; - \iint\limits_{Q}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial u\partial v}(u,v)(g\circ\varphi)(u,v)dudv.$$

A seguir, integrando por partes temos, já que $(g\circ\varphi)(u,\pm c) = g(u,\pm c) = 0$,

$$\int_{-c}^{c}\Big[\int_{-c}^{c}\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}(u,v)\partial_v(g\circ\varphi)dv\Big]du =$$

$$= \int_{-c}^{c}\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}(u,v)(g\circ\varphi)(u,v)\Big|_{v=-c}^{v=+c} \; - \; \int_{-c}^{c}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial v\partial u}(u,v)(g\circ\varphi)(u,v)dv\right]du$$

$$= - \iint\limits_{Q}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial v\partial u}(u,v)(g\circ\varphi)(u,v)dudv.$$

Subtraindo os resultados destas duas integrações por partes encontramos

$$\iint\limits_{Q}\Big[\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}(u,v)\partial_u(g\circ\varphi)(u,v) \; - \; \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}(u,v)\partial_v(g\circ\varphi)(u,v)\Big]dudv =$$

$$= \int_{-c}^{c}[g(c,v)-g(-c,v)]dv + \iint\limits_{Q}\left[\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial v\partial u}(u,v) - \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial u\partial v}(u,v)\right](g\circ\varphi)(u,v)dudv.$$

Entretanto, pelo Lema de Schwarz as derivadas mistas comutam. Logo,

$$\iint\limits_{Q}\Big[\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}\partial_u(g\circ\varphi) \; - \; \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\partial_v(g\circ\varphi)\Big]dudv = \int_{-c}^{c}[g(c,v)-g(-c,v)]dv =$$

$$= \int_{-c}^{c}\left[\int_{-\infty}^{c}f(t,v)dt - \int_{-\infty}^{-c}f(t,v)dt\right]dv =$$

$$= \int_{-c}^{c}\int_{-c}^{c}f(t,v)dtdv = \iint f(x,y)dxdy \blacksquare$$

REFERÊNCIAS

1. Apostol, T. M., *Análisis Matemático*, Editorial Reverté, 1960.
2. Bartle, R. G., *The Elements of Real Analysis*, second edition, John Wiley & Sons, 1976
3. Guidorizzi, H. L., *Um Curso de Cálculo*, Vol 1 e 2, 5 ed., Ed. LTC, 2002.
4. Hairer, E., and Wanner, G., *Analysis by Its History*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2000.
5. Lax, P. D., *Change of Variables in Multiple Integrals*, Amer. Math. Monthly, pp. 497-501, 1999.
6. Lax, P. D., *Change of Variables in Multiple Integrals II*, Amer. Math. Monthly, pp. 115-119, 2001.
7. Lima, E., *Curso de Análise* , Vol 2., IMPA, 2009.
8. Simmons, G. F., *Cálculo com Geometria Analítica*, Vol 2, McGraw-Hill, 1988.
9. Spivak, M., *O Cálculo em Variedades*, Ed. Ciência Moderna, 2003.