MAT 216 - Cálculo III - 1º SEMESTRE de 2014 - IFUSP

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM COEFICIENTES CONSTANTES

Referência: "A Formula Substituting the Undetermined Coefficients and the Annihilator Methods", Oswaldo Rio Branco de Oliveira, *International Journal of Mathematical Education in Sciences and Technology* **44**(3) (2013), 462–468, http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2012.714496

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

http://www.ime.usp.br/~oliveira

Apresentaremos a

RESOLUÇÃO DE $P\left(\frac{d}{dt}\right)x = R(t)e^{\gamma t}$**,** $R = R(t)$ **um polinômio real e** $\gamma \in \mathbb{C}$**.**

Antes, mostremos alguns lemas.

Lema 1. *Sejam* $a_n, \ldots, a_1, a_0$ *números não todos nulos e*

$$R(t) = b_n t^n + \cdots + b_1 t + b_0$$

um polinômio de grau menor ou igual a n*. Consideremos a edo na variável* t

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + \ a_1 x' + a_0 x \ = \ R(t) \ = \ b_n t^n \ + \cdots + \ b_1 t \ + b_0.$$

(a) Se $a_0 \neq 0$*, então existe uma solução polinomial* Q*, com grau*$(Q) =$ *grau*(R)*.*

(b) Seja $k = \max\{i : a_0 = 0, \ldots, a_i = 0\}$*. Então, a edo tem uma solução polinomial da forma* $Q = t^{k+1}R_1$*, com grau*$(R_1) =$ *grau*(R)*.*

Prova.

(a) Resolvamos o par de equações

$$(1.1)\quad \begin{cases} Q(t) = c_n t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \cdots + c_2 t^2 + c_1 t + c_0, \\ a_0 Q + a_1 Q' + a_2 Q'' + \cdots + \ a_j Q^{(j)} + \cdots + a_{n-1}Q^{(n-1)} + a_n Q^{(n)} = R, \end{cases}$$

identificando o coeficiente de t^{n-i} nas parcelas $a_j Q^{(j)}$, $j \leq i$ [notemos que nas demais parcelas tal coeficiente é zero]. Fixada tal parcela um fator deste coeficiente surge do trivial cômputo,

$$c_{n-i+j}\frac{d^j}{dt^j}\{\, t^{n-i+j}\} = c_{n-i+j}(n-i+j)(n-i+j-1)\cdots(n-i+1)t^{n-i},$$

e o coeficiente é então

$$a_j c_{n-i+j}\frac{(n-i+j)!}{(n-i)!}.$$

O coeficiente de t^{n-i} no sistema (1.1) satisfaz, ordenando a soma em ordem decrescente em $j = i, i-1, \ldots, 0$,

$$(i)\ \ a_i c_n \frac{n!}{(n-i)!} + \cdots + a_j c_{n-i+j}\frac{(n-i+j)!}{(n-i)!} + \cdots + a_0 c_{n-i} = b_{n-i}\,,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Pelas expressões (i) acima obtemos a equação matricial (matriz triangular inferior) trivialmente resolúvel,

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ a_1 n & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ a_2\frac{n!}{(n-2)!} & a_1\frac{(n-1)!}{(n-2)!} & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_i\frac{n!}{(n-i)!} & a_{i-1}\frac{(n-1)!}{(n-i)!} & . & a_j\frac{(n-i+j)!}{(n-i)!} & . & . & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & a_0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & a_0 & 0 \\ a_n n! & . & . & . & . & . & . & . & a_2 2! & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_n \\ c_{n-1} \\ c_{n-2} \\ . \\ . \\ . \\ c_{n-i} \\ . \\ c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ . \\ . \\ . \\ b_{n-i} \\ . \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}.$$

(b) Neste caso, a equação é

$$a_n x^{(n)} + \cdots + a_{k+1}x^{(k+1)} = R.$$

Por (a), a equação

$$a_n y^{(n-k-1)} + \cdots + a_{k+1} y = R,\ \text{com } k+1 \le n,$$

têm solução $y(t) = Q(t)$, com grau(Q) = grau(R). Integrando a função $y = y(t)$ $(k+1)$-vezes, e escolhendo em cada integração zero para termo independente, obtemos a solução desejada (vide exemplos ao final)■

A FÓRMULA PARA $P\left(\frac{d}{dt}\right)\{Q(t)e^{\gamma t}\}$.

Lema 2 (Regra de Leibnitz para a n-ésima derivada de um produto). *Sejam f e g duas funções em $C^\infty(\mathbb{R})$. Então,*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)} g^{(n-j)}.$$

Prova.

Para $n = 1$ temos $(fg)' = f'g + fg'$. Supondo a fórmula para n, temos

$$(fg)^{(n+1)} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)} g^{(n-j)}\right] = \sum_{j=0}^{n}\left[\binom{n}{j} f^{(j+1)} g^{(n-j)} + \binom{n}{j} f^{(j)} g^{(n+1-j)}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(n+1)}g + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + fg^{(n+1)}$$

$$= \binom{n+1}{0} fg^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \ \blacksquare$$

Neste texto, utilizaremos também uma fórmula para as derivadas de um polinômio. Dado um polinômio

$$p(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k,$$

é fácil ver que

$$p^{(j)}(t) = \sum_{k=j}^{n} a_k \frac{k!}{(k-j)!} t^{k-j}.$$

O resultado a seguir é o principal deste texto.

Teorema 3. *Consideremos o operador diferencial com coeficientes constantes e reais*

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) = a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{d^2}{dt^2} + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 I$$

e seu polinômio característico (com coeficientes reais)

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0.$$

Seja $Q = Q(t)$ uma função de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Então, vale a fórmula

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\left\{ Q(t)e^{\gamma t} \right\} = \left[\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!}Q^{(n)} + \cdots + \frac{p''(\gamma)}{2!}Q'' + p'(\gamma)Q' + p(\gamma)Q\right] e^{\gamma t}.$$

Prova.

Pela regra de Leibnitz segue

$$\begin{aligned} P\Big(\frac{d}{dt}\Big)[Q(t)e^{\gamma t}] &= \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dt^k}\left[Q(t)e^{\gamma t}\right] \\ &= \left[\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} Q^{(j)}(t)\gamma^{k-j}\right] e^{\gamma t}. \end{aligned}$$

Trocando a ordem no último somatório (entre colchetes) encontramos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} Q^{(j)}\gamma^{k-j} &= \sum_{j=0}^{n}\left[\sum_{k=j}^{n} a_k \frac{k!}{(k-j)!}\gamma^{k-j}\right]\frac{Q^{(j)}}{j!} \\ &= \sum_{j=0}^{n} p^{(j)}(\gamma)\frac{Q^{(j)}}{j!}. \end{aligned}$$

Logo,

$$P\Big(\frac{d}{dt}\Big)[Q(t)e^{\gamma t}] = \left[\sum_{j=0}^{n} \frac{p^{(j)}(\gamma)}{j!}Q^{(j)}\right] e^{\gamma t} \blacksquare$$

Seja $R(t)$ um polinômio com coeficientes reais, na variável real t. Seja $\gamma \in \mathbb{C}$. Seja $P(d/dt)$ um operador diferencial como no Teorema 3.

Teorema 4. A equação diferencial

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)x = R(t)e^{\gamma t}, \tag{4.1}$$

admite uma solução particular da forma

$$Q(t)e^{\gamma t},$$

com $Q(t)$ um polinômio satisfazendo a edo

$$\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!}Q^{(n)} + \cdots + \frac{p''(\gamma)}{2!}Q'' + p'(\gamma)Q' + p(\gamma)Q = R. \tag{4.2}$$

(a) Se γ é um número real, podemos supor $Q = Q(t)$ um polinômio real e então,

$$x_p = x_p(t) = Q(t)e^{\gamma t} \text{ é uma função real.}$$

(b) Se γ não é real, então $Q(t)$ têm coeficientes complexos e

$$z_p(t) = Q(t)e^{\gamma t}$$

é uma solução complexa da edo (4.1) . Escrevendo $\gamma = \alpha + \beta i$, as funções

$$x_p = \mathrm{Re}\{\, z_p \,\} \ \text{ e } \ y_p = \mathrm{Im}\{\, z_p \,\}$$

satisfazem

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)x_p = R(t)e^{\alpha t}\cos\beta t \quad \text{e} \quad P\left(\frac{d}{dt}\right)y_p = R(t)e^{\alpha t}\sin\beta t \ .$$

(c) Se $p(\gamma) \neq 0$, então temos $\mathrm{grau}(Q) = \mathrm{grau}(R)$.

(d) Se γ é raíz de multiplicidade k do polinômio característico podemos supor

$$Q(t) = t^k R_1(t), \ \mathrm{com}\, \mathrm{grau}(R_1) = \mathrm{grau}(R).$$

Prova. Vide próxima página.

Notemos que

$$\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!} = 1.$$

Pelo Lema 2 uma solução particular $x_p(t) = Q(t)e^{\gamma t}$ satisfaz,

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\{\,Q(t)e^{\gamma t}\,\} = \left[\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!}Q^{(n)} + \cdots + \frac{p''(\gamma)}{2!}Q'' + p'(\gamma)Q' + p(\gamma)Q\right]e^{\gamma t} = R(t)e^{\gamma t},$$

donde segue a equação (4.2).

Pelo Lema 1 segue que existe um polinômio $Q(t)$ resolvendo a equação (4.2).

Provamos as afirmações iniciais.

A seguir, provemos (a), (b), (c) e (d).

(a) Como $R(t)$ é um polinômio real e γ é real, pelo Lema 1 segue trivialmente que podemos supor $Q(t)$ um polinômio com coeficientes reais.

(b) Como γ é complexo, pelo Lema 1 segue que $Q(t)$ tem coeficientes complexos. Escrevendo

$$z_p(t) = Q(t)e^{\gamma t} = x_p(t) + iy_p(t), \text{ com } x_p(t) \in \mathbb{R} \text{ e } y_p(t) \in \mathbb{R},$$

obtemos

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)(z_p) = P\left(\frac{d}{dt}\right)(x_p) + iP\left(\frac{d}{dt}\right)(y_p) = R(t)e^{\alpha t}\cos\beta t + iR(t)e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

Donde concluímos (b).

(c) É óbvio, devido à equação (4.2), que se $p(\gamma) \neq 0$ então

$$\text{grau}(Q) = \text{grau}(R).$$

(d) Se γ é raíz de multiplicidade k do polinômio característico, então a edo

$$\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!}Q^{(n)} + \cdots + \frac{p^{(k)}(\gamma)}{2!}Q^{(k)} = R(t),$$

tem, devido ao Lema 1, uma solução polinomial $y(t) = Q^{(k)}(t)$, satisfazendo $\text{grau}(y) = \text{grau}(R)$. Integrando o polinômio $y = y(t)$ k-vezes, e escolhendo termos independentes nulos a cada passo da integração, obtemos uma solução particular na forma desejada ■

O reseultado a seguir é muito útil no estudo das equações diferenciais com coeficientes constantes.

Sejam $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ coeficientes reais. Suponhamos $a_n \neq 0$.

Teorema 5. *Consideremos a edo homogênea*

$$a_n x^{(n)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0.$$

Se γ é uma raíz de multiplicidade m do polinômio característico $p(\lambda)$, então as m funções

$$e^{\gamma t}, te^{\gamma t}, \ldots, t^{m-1}e^{\gamma t}$$

são soluções da edo homogênea.

Prova.

Utilizemos que $p(\gamma) = p'(\gamma) = \cdots = p^{(m-1)}(\gamma) = 0$ e que

$$\frac{d^k(t^j)}{dt^k} = 0 \text{ se } k > j.$$

Ao computarmos

$$P\Big(\frac{d}{dt}\Big)(t^j e^{\gamma t}), \text{ para } j = 0, \ldots, m-1,$$

pela fórmula acima encontramos

$$P\Big(\frac{d}{dt}\Big)(t^j e^{\gamma t}) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{p^k(\gamma)}{k!}\frac{d^k(t^j)}{dt^k} \ + \ \sum_{k=m}^{n} \frac{p^k(\gamma)}{k!}\frac{d^k(t^j)}{dt^k} = 0 + 0 \blacksquare$$

Conclusão: Dada uma edo com coeficientes constantes e de ordem n, determinando suas raízes características e suas respectivas multiplicidades algébricas encontramos n soluções da edo homogênea.

Exemplos.

(E1) Resolva a edo

$$x''' - 5x'' + 3x' + 9x = t^3e^{3t}.$$

Solução.

O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1)$.

A solução geral da edo homogênea associada é

$$x_h = c_1e^{3t} + c_2te^{3t} + c_3e^{-t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Pelo Teorema 4 segue que existe uma solução particular $x_p = Q(t)e^{3t}$, com $Q(t)$ um polinômio real, da edo (E1), tal que

$$(E1.1) \qquad \frac{p'''(3)}{3!}Q''' + \frac{p''(3)}{2!}Q'' + \frac{p'(3)}{1!}Q' + \frac{p(3)}{0!}Q = t^3.$$

Mas, $p' = 3\lambda^2 - 10\lambda + 3$, $p'' = 6\lambda - 10$ e $p''' = 6$. Donde (E1.1) reduz-se a

$$Q''' + 4Q'' = t^3,$$

com solução polinomial $Q'' = \frac{t^3}{4} + at^2 + bt + c$. Donde, $Q''' = \frac{3}{4}t^2 + 2at + b$ e

$$t^3 = 4Q'' + Q''' = t^3 \ + \ \Big(4a + \frac{3}{4}\Big)t^2 \ + \ \Big(4b + 2a\Big)t \ + \ (4c + b).$$

Logo,

$$a = -\frac{3}{16}, \quad b = \frac{3}{32} \quad \text{e} \quad c = -\frac{3}{128},$$

$$Q'' = \frac{t^3}{4} - \frac{3}{16}t^2 + \frac{3}{32}t - \frac{3}{128}$$

e escolhemos as primitivas com termo independente nulo

$$Q' = \frac{t^4}{16} - \frac{t^3}{16} + \frac{3t^2}{64} - \frac{3}{128}t,$$

$$Q = \frac{t^5}{80} - \frac{t^4}{64} + \frac{t^3}{64} - \frac{3t^2}{256}.$$

A solução geral é,

$$x_g = c_1e^{3t} + c_2te^{3t} + c_3e^{-t} + \Big(\frac{t^5}{80} - \frac{t^4}{64} + \frac{t^3}{64} - \frac{3t^2}{256}\Big)e^{3t}, \quad c_i's \in \mathbb{R} \blacksquare$$

(E2) Resolva a edo

$$x'' - 2x' + 2x = t^2 e^t \cos t.$$

Solução. Notemos que $t^2 e^t \cos t = \mathrm{Re}\Big(t^2 e^{(1+i)t} \Big)$.

O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2 + 1$, com raízes $\lambda = 1 \pm i$. Assim, a solução geral da equação homogênea associada é

$$x_h(t) \;=\; c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t\,, \quad c_1\,, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Se $z_p(t)$ é solução particular complexa de

$$z'' - 2z' + 2z \;=\; t^2 e^{(1+i)t} = t^2 e^t (\,\cos t + i \sin t\,)\,,$$

então $x_p(t) = \mathrm{Re}\big(\, z_p(t)\,\big)$ é solução particular real de (E2). Já vimos que existe uma tal $z_p(t)$ na forma

(1) $\qquad z_p(t) = Q(t) e^{(1+i)t}$, com $Q(t)$ um polinômio satisfazendo

$$Q'' + p'(1+i)Q' + p(1+i)Q = t^2.$$

Temos $p(1+i) = 0$, $p'(\lambda) = 2\lambda - 2 = 2(\lambda - 1)$ e $p'(1+i) = 2i$. Obtemos

$$Q'' + 2iQ' = t^2.$$

Logo, Q' é um polinômio de grau dois cujo coeficiente do monômio t^2 é $\frac{1}{2i}$:

$$Q' = \frac{t^2}{2i} + at + b \Rightarrow Q'' = \frac{t}{i} + a = -it + a \quad \text{e}$$
$$t^2 = 2iQ' + Q'' = t^2 + (2ai - i)t + (2bi + a)\ .$$

Logo, $a = \frac{1}{2}$ e $b = -\frac{1}{4i} = \frac{i}{4}$. Donde,

$$Q' = \frac{t^2}{2i} + \frac{t}{2} + \frac{i}{4} \;=\; -\frac{t^2 i}{2} + \frac{t}{2} + \frac{i}{4} \quad \text{e escolhemos} \quad Q(t) = -\frac{t^3 i}{6} + \frac{t^2}{4} + \frac{ti}{4}.$$

Substituindo $Q(t)$ na equação (1) obtemos,

$$z_p(t) = \Big[-\frac{t^3}{6} i \;+\; \frac{t^2}{4} \;+\; \frac{t}{4} i \Big] e^t \Big(\cos t + i \sin t \Big)$$

e

$$x_p(t) \;=\; \mathrm{Re}\big(\, z_p(t)\,\big) = e^t \Big[\frac{t^2 \cos t}{4} \;+\; \frac{t^3 \sin t}{6} \;-\; \frac{t \sin t}{4} \Big]$$

Resposta.

$$x_g(t) = c_1 e^t \cos t + c_2 \sin t \;+\; e^t \Big[\frac{t^2 \cos t}{4} \;+\; \frac{t^3 \sin t}{6} \;-\; \frac{t \sin t}{4} \Big],\ \ c_1\,, c_2 \in \mathbb{R} \blacksquare$$

(E3) Resolvamos a edo

$$x'' + 2x' + 2x = e^{\alpha t} \sin \beta t \, , \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Solução.

O polinômio característico é

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = (\lambda + 1)^2 + 1, \text{ com raízes } \lambda = -1 \pm i.$$

A solução geral da edo homogênea associada é

$$x_h = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \sin t \, , \quad c_1 \, , c_2 \in \mathbb{R}.$$

Se $\beta = 0$ a edo é homogênea, cuja solução geral já foi dada.

Se $\beta \neq 0$, como temos $e^{\alpha t} \sin \beta t = \mathrm{Im}\{ \, e^{(\alpha + i\beta)t} \, \}$ e o problema é em $\mathbb{R}$, a parte imaginária de uma solução da edo complexa

$$x'' + 2x' + 2x = e^{\gamma t}, \text{ com } \gamma = \alpha + i\beta,$$

é solução da edo dada.

Para obtermos uma solução $z_p(t) = Q(t)e^{\gamma t}$ da edo complexa, notemos que pelo Teorema 4 o polinômio $Q(t)$ satisfaz

$$(E3.1) \qquad \frac{p''(\gamma)}{2!} Q'' + \frac{p'(\gamma)}{1!} Q' + \frac{p(\gamma)}{0!} Q \; = \; Q'' + p'(\gamma) Q' + p(\gamma) Q \; = \; 1.$$

Separemos a análise em três casos.

(1) Caso $\gamma \neq -1 \pm i$ (γ não é raíz característica).

Então,

$$Q(t) = \frac{1}{p(\gamma)} \text{ resolve } (E3.1)$$

ao passo que

$$z_p = \frac{\overline{p(\gamma)}}{|p(\gamma)|^2} e^{\gamma t} \text{ resolve a edo complexa}$$

e que

$$x_p = \frac{1}{|p(\gamma)|^2} \mathrm{Im}\{ \, p(\overline{\gamma}) e^{\gamma t} \, \} \text{ resolve a edo dada.}$$

A solução geral é

$$x_g \; = \; c_1 e^{-t} \cos t \; + \; c_2 e^{-t} \sin t \; + \; \frac{1}{|p(\gamma)|^2} \mathrm{Im}\{ \, p(\overline{\gamma}) e^{\gamma t} \, \} , \quad c_1 \, , c_2 \in \mathbb{R} \; .$$

(2) Caso $\gamma = -1 + i$.

Escrevemos a equação (E3.1) como

$$Q'' + 2iQ' = 1,$$

com solução

$$Q' = \frac{1}{2i} \text{ e } Q = -\frac{t}{2}\, i.$$

Donde segue,

$$z_p = Q(t)e^{\gamma t} = -\frac{t}{2}e^{-t}\, i\, e^{it} \quad \text{e} \quad x_p(t) = \mathrm{Im}\{\, z_p(t)\,\} = -\frac{t}{2}e^{-t}\cos t.$$

A solução geral x_g é dada por

$$x_g \;=\; c_1 e^{-t}\cos t \;+\; c_2 e^{-t}\sin t \;-\; \frac{t}{2}e^{-t}\cos t\,, \text{ com } c_1\,, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

(3) Caso $\gamma = -1 - i$. A solução é

$$x_g \;=\; c_1 e^{-t}\cos t + c_2 e^{-t}\mathrm{sen}\, t + \frac{t}{2}e^{-t}\cos t\,, c_1\,, c_2 \in \mathbb{R}\ \blacksquare$$

(E4) Resolva a equação

$$\ddot{x} - 4x = (1 + t + t^2)e^{2t}\ .$$

Solução.

O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - 4$, com raízes $\lambda = \pm 2$. A solução geral da edo homogênea associada é

$$x_h = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t}\ , \text{ com } c_1\,, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Para uma solução particular $x_p = Q(t)e^{2t}$, com Q um polinômio, resolvemos

$$Q'' + p'(2)Q' + p(2)Q = 1 + t + t^2.$$

Isto é, pois $p(2) = 0$ e $p'(2) = 4$,

$$Q'' + 4Q' = 1 + t + t^2.$$

Substituindo $R = Q'$ temos $R' + 4R = 1 + t + t^2$ com solução $R = At^2 + Bt + C$, donde segue $R' + 4R = (2At + B) + 4(At^2 + Bt + C) = 1 + t + t^2$ e portanto $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{8}$ e $C = \frac{7}{32}$. Logo, escolhendo

$$Q = \int R(t)\, dt = \frac{t^3}{12} + \frac{t^2}{16} + \frac{7t}{32},$$

a solução geral da equação dada é

$$x_g(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t} + \Big(\frac{t^3}{12} + \frac{t^2}{16} + \frac{7t}{32}\Big)\blacksquare$$

(E5) Resolva a equação

$$\ddot{x} + 4x = t^2 \sin 2t \ .$$

Solução. Notemos que $t^2 \sin 2t =$Im$(t^2 e^{2it})$.

O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 + 4$, com raízes $\lambda = \pm 2i$. A solução geral real da equação homogênea associada é

$$x_h = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t \,, \quad c_1 \,, c_2 \in \mathbb{R} \ .$$

Procuremos uma solução complexa particular na forma $z_p(t) = Q(t)e^{2it}$, com Q um polinômio, da edo complexa

$$\ddot{z} + 4z = t^2 e^{2it}.$$

Pelo Teorema 4 temos

$$Q'' + p'(2i)Q' + p(2i)Q = t^2.$$

Como $p(2i) = 0$ e $p'(2i) = 4i$, com a substituição $R = Q'$ obtemos

$$R' + 4iR = t^2.$$

Donde, supondo $R = At^2 + Bt + C$ temos

$$R' = 2At + B \quad \text{e} \quad R' + 4iR = (2At + B) + 4i(At^2 + Bt + C) = t^2.$$

Assim, temos $A = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}$, $B = \frac{1}{8}$, $C = \frac{i}{32}$ e $Q' = R(t) = -\frac{i}{4}t^2 + \frac{1}{8}t + \frac{i}{32}$ e

$$\text{escolhemos} \quad Q(t) = -\frac{t^3}{12}i + \frac{t^2}{16} + \frac{t}{32}i.$$

Logo, a solução particular complexa é

$$z_p(t) = \Big(-\frac{t^3}{12}i + \frac{t^2}{16} + \frac{t}{32}i\Big)(\cos 2t + i \sin 2t) \ .$$

Uma solução particular real ao problema dado é

$$x_p(t) = \text{Im}(z_p)(t) = -\frac{t^3 \cos 2t}{12} + \frac{t^2 \sin 2t}{16} + \frac{t \cos 2t}{32} \ .$$

A solução geral (real) da edo dada é

$$x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \Big[-\frac{t^3 \cos 2t}{12} + \frac{t^2 \sin 2t}{16} + \frac{t \cos 2t}{32} \Big] \, , \text{ com } c_1 \,, c_2 \in \mathbb{R} \blacksquare$$

Departamento de Matemática

Universidade de São Paulo

oliveira@ime.usp.br

`http://www.ime.usp.br/~oliveira`