CÁLCULO III - MAT 216 - IFUSP- primeiro semestre de 2014

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

`http://www.ime.usp.br/~oliveira` oliveira@ime.usp.br

O TEOREMA DO POSTO (PARA MATRIZES)

Definição. Seja M uma matriz em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $0 < k \leq m$ e $0 < k \leq n$. Um **menor de ordem** k de M é o determinante de uma matriz quadrada de ordem k obtida pela remoção de $m-k$ linhas e $n-k$ colunas da matriz M.

Definição. Seja M em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. O **posto coluna/linha** de M é o número máximo de colunas/linhas linearmente independentes de M.

Lema. *Seja M uma matriz em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, com $m \leq n$, tal que suas m linhas são linearmente independentes (LI.). Então,*

(a) Existem m colunas de M tais que o determinante da matriz $m \times m$ formado por tais colunas é não zero.

(b) Tais m colunas são LI.

Prova.

(a) Escrevamos

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

A primeira linha de M_1 contém um elemento $a_{1j} = \lambda_{1j} \neq 0$. Multiplicando a primeira linha por um número conveniente e somando-a à segunda linha, temos uma nova matriz cuja segunda linha apresenta o número 0 na j-ésima coluna. As m linhas desta nova matriz são também L. I. e todos os seus menores (determinantes) de ordem m são iguais aos correspondentes menores (determinantes) originais. Iterando o procedimento, multiplicamos a primeira linha por sucessivos números convenientes e a somamos ordenadamente às demais linhas e obtemos uma matriz M_2 satisfazendo as condições: *o primeiro elemento na j-ésima coluna é $\lambda_{1j} = a_{1j} \neq 0$, os demais elementos na*

j-ésima coluna são nulos, suas linhas são L. I. e todos os seus menores de ordem m são iguais aos respectivos menores originais da matriz M_1. Escrevamos,

$$M_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & \lambda_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & 0 & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & 0 & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

A segunda linha de M_2 contém um elemento $b_{2k} = \lambda_{2k} \neq 0$ com $k \neq j$. Então, analogamente ao feito acima, obtemos a matriz M_3 (v. abaixo) tal que: *o segundo elemento em sua k-ésima coluna é $\lambda_{2k} = b_{2k} \neq 0$, os demais elementos na k-ésima coluna são nulos (a operação de multiplicar a segunda linha de M_2 por uma constante e então somá-la à primeira linha não muda o elemento λ_{1j} na j-ésima coluna da primeira linha de M_2), a j-ésima coluna de M_3 é igual a j-ésima coluna de M_2, suas linhas são L. I. e, ainda, todos os seus menores de ordem m são iguais aos respectivos menores de M_2.* Escrevamos,

$$M_3 = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & 0 & \cdots & \lambda_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & & \lambda_{2k} & & 0 & & c_{2n} \\ c_{31} & & 0 & & 0 & & c_{3n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}.$$

Por fim, iterando tal processo encontramos as m colunas desejadas.

(b) Segue por uma propriedade de determinantes■

Teorema do Posto. *Seja M em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e p (o posto de M) o número máximo de linhas LI. de M. O número máximo de colunas LI. de M é p.*

Prova.

Seja $\overline{M}$ em $M_{k\times n}(\mathbb{R})$ formada por k linhas LI de M. Donde, $k \leq m$. Tais linhas são vetores em $\mathbb{R}^n$, que tem no máximo n vetores LI. Logo, $k \leq n$.

Pelo Lema, $\overline{M}$ tem k colunas LI. É fácil ver que as correspondentes k colunas de M são LI. Analogamente para a matriz transposta M^t■