$1^{\underline{a}}$ PROVA DE CÁLCULO III - IAGUSP - MAT216

5 de abril, 2019

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Extra	
Total	

Nome : ____________________GABARITO ____________________
N$^{\underline{o}}$USP : ____
Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Escolha 4 questões entre as 5 questões numeradas.
Justifique todas as passagens
BOA SORTE!

1. (a) Enuncie o *Teorema da Função Inversa* para funções em duas variáveis reais. Defina a terminologia utilizada.

A seguir, considere a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x,y) = (u,v) \text{ com } (u,v) = (2x + 3y + \cos y,\ 5y + 4\text{sen}\, x).$$

(b) Mostre que F é inversível em uma vizinhança do ponto $(0,0)$ [isto é, em um aberto que contém o ponto $(0,0)$] e que sua função inversa $G = G(u,v)$ é de classe C^1 numa vizinhança do ponto $F(0,0) = (u_0, v_0)$. Determine (u_0, v_0).

(c) Determine a derivada parcial

$$\frac{\partial G}{\partial v}(u_0, v_0).$$

Solução.

(a) Vide `https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-IMPLI-INVERSA.pdf` p. 7.

(b) A função F e suas derivadas parciais são contínuas. Logo, F é de classe C^1. Temos

$$(u_0, v_0) = F(0,0) = (1,0).$$

Ainda mais,

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 3 - \sin y \\ 4\cos x & 5 \end{pmatrix} \text{ e } \det JF(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Logo, pelo teorema da função inversa, F é inversível em uma vizinhança aberta X de $(0,0)$ e existem uma vizinhança aberta U de $(1,0)$ e uma função $G : U \to X$ de classe C^1 que é a inversa de $F : X \to U$.

(c) Ainda mais, temos

$$JG(1,0) = [JF(0,0)]^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donde então segue

$$\frac{\partial G}{\partial v}(u_0, v_0) = \left(\frac{3}{2}, -1\right) \clubsuit$$

2. (a) Enuncie o *Teorema da Função Implícita* para uma função $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

(b) Suponhamos que todas as funções a seguir são diferenciáveis. Sejam $F(x, y, z)$ e $G(x, y, z)$, com $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, e $y = y(x)$ e $z = z(x)$, com $x \in \mathbb{R}$, satisfazendo

$$\begin{cases} F(x, y(x), z(x)) & = 1697 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \\ G(x, y(x), z(x)) & = 1888 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \\ (0, y(0), z(0)) & = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Suponha ainda que

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(0,0,0) = 2, & \frac{\partial F}{\partial y}(0,0,0) = 3, & \frac{\partial F}{\partial z}(0,0,0) = 4, \\ \\ \frac{\partial G}{\partial x}(0,0,0) = 4, & \frac{\partial G}{\partial y}(0,0,0) = 6, & \frac{\partial G}{\partial z}(0,0,0) = 9. \end{cases}$$

Determine os valores de

$$\frac{dy}{dx}(0) = y'(0) \qquad \text{e} \qquad \frac{dz}{dx}(0) = z'(0).$$

Solução.

(a) Vide `https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-IMPLI-INVERSA.pdf` p. 5 ou `https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-IMPLI-EXEMPLOS.pdf` p. 16.

(b) Pela regra da cadeia temos, derivando as duas primeiras equações do sistema acima em relação a x e avaliando as derivadas em $x = 0$,

$$\begin{cases} F_x(0,0,0).1 + F_y(0,0,0)y'(0) + F_z(0,0,0)z'(0) = 0 \\ \\ G_x(0,0,0).1 + G_y(0,0,0)y'(0) + G_z(0,0,0)z'(0) = 0. \end{cases}$$

Substituindo os valores dados obtemos

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'(0) \\ z'(0) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Então, pela regra de Cramer concluímos

$$y'(0) = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}} = -\frac{2}{3} \quad \text{e} \quad z'(0) = -\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}} = -\frac{0}{3} = 0 \clubsuit$$

3. (a) Enuncie o *Teorema do Hessiano* para funções em duas variáveis.
   (b) Enuncie o *Teorema de Weierstrass* para funções em duas variáveis.
   (c) Dada $f(x,y) = 6x^2 + 18xy + 4y^2 - 6x - 10y + 5$, determine os extremantes de f e os valores máximo e mínimo locais e absolutos de f no quadrado

$$K = [-1,+1] \times [-1,+1] = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \quad \text{e} \quad |y| \leq 1\Big\}.$$

Solução.

(a) Vide `https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-HESSIANO.pdf` p. 6.

(b) Vide `https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-WEIERSTRASS.pdf` .

(c) [Exercício resolvido em
`https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-LAGRAN-EXEMPLOS.pdf` p. 17]
Os pontos críticos de f são dados pela equação

$$\overrightarrow{\nabla} f = \langle 12x + 18y - 6, 18x + 8y - 10\rangle = \langle 0,0\rangle \;\Rightarrow\; 2x+3y-1 = 0 \text{ e } 9x+4y-5 = 0.$$

Logo, o único ponto crítico no interior de K é

$$P_0 = \left(\frac{11}{19}, -\frac{1}{19}\right).$$

A matriz hessiana de f é,

$$\mathcal{H}_f = \begin{bmatrix} 12 & 18 \\ 18 & 8 \end{bmatrix}$$

e então, $f_{xx}(P_0) = 12 > 0$ e o determinante hessiano $H_f(P_0)$ é negativo. Logo, P_0 é ponto de sela e f não tem máximo ou mínimo local em $\text{int}(D)$. Assim, o máximo e o mínimo absolutos pertencem à fronteira de K,

$$\partial K = \{-1\} \times [-1,1] \,\cup\, \{1\} \times [-1,1] \,\cup\, [-1,1] \times \{-1\} \,\cup\, [-1,1] \times \{1\}\ .$$

Na figura abaixo as setas indicam a direção do vetor ortogonal a ∂K.

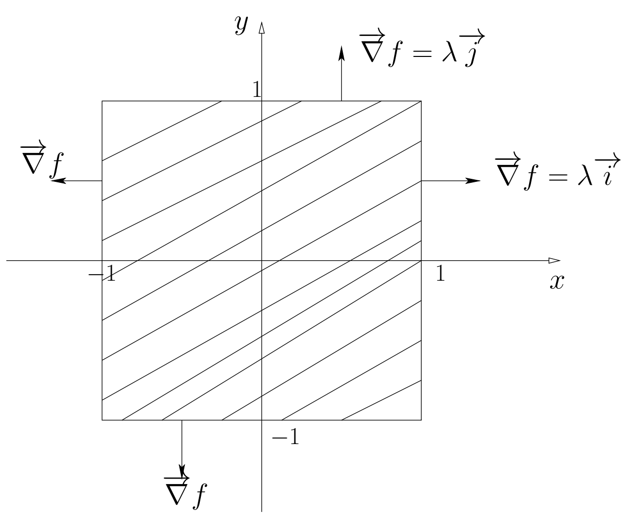

Figura 1: Ilustração ao Exemplo 7

Os extremantes locais na fronteira de K, mas não um vértice, satisfazem (vide Teorema 2) o que segue.

Em $\{-1\}\times]-1,1[$ temos

$$\begin{cases} x = -1 \\ 0 = f_y = -18 + 8y - 10, \end{cases}$$

donde segue $y = 7/2$, possibilidade que descartamos.

Em $\{1\}\times]-1,1[$ temos

$$\begin{cases} x = 1 \\ 0 = f_y = 18 + 8y - 10, \end{cases}$$

donde segue $y = -1$ e $P_1 = (1,-1)$ que não pertence ao segmento considerado, é um vértice e será analizado à parte.

Em $]-1,1[\times\{-1\}$ temos

$$\begin{cases} y = -1 \\ 0 = f_x = 12x - 18 - 6, \end{cases}$$

donde segue $x = 2$, que também descartamos.

Em $]-1,1[\times\{1\}$ temos

$$\begin{cases} y = 1 \\ 0 = f_x = 12x + 18 - 6, \end{cases}$$

donde segue $x = -1$ e $P_2 = (-1,1)$ que não pertence ao segmento considerado, é um vértice e será analizado à parte.

Finalmente, os pontos de máximo e o mínimo se encontram entre o vértices. Temos, $f(1,1) = 17$, $f(-1,-1) = 49$, $f(1,-1) = +1$, e $f(-1,+1) = -7$.

Resposta. Não existem máximo ou mínimo locais e interiores. Ainda,

$$\begin{cases} f(-1,+1) = -7 \text{ é o mínimo absoluto} \\ \text{e} \\ f(-1,-1) = 49 \text{ é o máximo absoluto} \clubsuit \end{cases}$$

4. (a) Enuncie o *Método dos Multiplicadores de Lagrange* para funções em três variáveis e com duas condições.

   (b) Enuncie o *Teorema de Weierstrass* para funções em três variáveis.

   (c) Ache os pontos mais próximos da origem e os pontos mais afastados da origem, todos com coordenadas sujeitas às restrições

$$x^2 + 4y^2 + z^2 = 4 \quad \text{e} \quad x + y + z = 1 \ .$$

   Esboce as superfícies acima e verifique que tal intersecção de superfícies é um conjunto compacto (isto é, fechado e limitado).

Solução.

(a) `https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-LAGRAN-EXEMPLOS.pdf` p. 11.

(b) `https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-WEIERSTRASS.pdf` p. 1.

(c) [Exercício resolvido em
`https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-LAGRAN-EXEMPLOS.pdf` p. 12]
As superfícies em questão são um elipsóide centrado na origem e um plano que passa pelos pontos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.
Consideremos a função quadrado da distância

$$D(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Minimizemos e maximizemos D sujeita às restrições dadas.
Verificado que existem os pontos procurados e que o método dos multiplicadores de Lagrange se aplica, devemos ter

$$\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 8y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x(8y-2z) - 2y(2x-2z) + 2z(2x-8y) = 0.$$

Logo,

$$x(4y-z)-y(x-z)+z(x-4y) = 0 \Longrightarrow 4xy-xz-xy+yz+xz-4yz = 0 \Longrightarrow 3xy-3yz = 0.$$

Donde segue $y = 0$ ou $z = x$.

◇ O caso $y = 0$. Substituindo nas condições encontramos

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 4 \\ x + z = 1 \end{cases} \Longrightarrow 2x^2-2x-3 = 0 \Longrightarrow 0 = x^2-x-\frac{3}{2} = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{6}{4}.$$

Encontramos

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2} \text{ e } z = \frac{1 \mp \sqrt{7}}{2}.$$

Seguem os pontos

$$P_1 = \left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right) \quad \text{e} \quad P_2 = \left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right).$$

◇ O caso $z = x$. Substituindo nas condições temos

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 2 \\ \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Longrightarrow x^2+2(1-2x)^2 = 2 \Longrightarrow 9x^2-8x = 0 \Longrightarrow 9x\left(x - \frac{8}{9}\right) = 0.$$

Encontramos os pontos

$$P_3 = (0, 1, 0) \text{ e } P_4 = \left(\frac{8}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right).$$

Temos

$$D(P_1) = D(P_2) = 4 \quad D(P_3) = 1$$

e

$$D(P_4) = \frac{64 + 49 + 64}{81} = \frac{176}{81} = 2 + \frac{14}{81}.$$

Assim, P_1 e P_2 são os pontos mais distantes da origem enquanto P_3 é o mais próxima da origem ♣

5. (a) Esboce a região

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1 \text{ com } x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } z \geq 0\}.$$

A região M é compacta? Justifique.

(b) Determine o valor máximo de

$$F(x, y, z) = xyz, \text{ sob a condição } x + y + z = 1, \text{ com } x > 0, y > 0 \text{ e } z > 0.$$

(c) Mostre a desigualdade entre as médias geométrica e aritmética:

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a + b + c}{3},$$

quaisquer que sejam $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$.

Solução (esboço).

(a) O conjunto M é uma pirâmide maciça (sólida) que está situada no octante $\{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } c \geq 0\}$ e cujos quatro vértices são dados pelos pontos $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

(b) Deixo ao leitor.

(c) Aplique o resultado obtido em (b) à terna de pontos

$$\alpha = \frac{a}{a + b + c}, \ \beta = \frac{b}{a + b + c} \text{ e } \gamma = \frac{c}{a + b + c} \clubsuit$$

Extra. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função diferenciável arbitrária. Escrevamos

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}.$$

Decida se é verdadeira ou falsa a afirmação

> *"Existe um ponto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo*
>
> $$F\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = JF(a,b) \times \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right],$$
>
> $$\textit{onde} \quad JF(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \\ \\ \frac{\partial g}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix}."$$

Isto é, prove-a ou dê um contra-exemplo.