MAT 216 - Cálculo III - 1 SEMESTRE de 2014 - IFUSP

O TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA
PARA FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS (APENAS), NO PLANO

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

http://www.ime.usp.br/~oliveira   oliveira@ime.usp.br

Extraído de

"The Implicit Function Theorem when the matrix $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ is only continuous at the base point"

Preprint disponível em arXiv:1312.2445, 2013 (basta digitar o título do artigo no Google)

O resultado abaixo é local. Simplificamos a notação enunciando-o em $\mathbb{R}^2$.

Teorema. *Sejam* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável, *com* $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0$ *em todo ponto, e um ponto* (a, b) *tal que* $F(a, b) = 0$. *Então, existe um retângulo aberto* $I \times J$, *centrado no ponto* (a, b), *satisfazendo o que segue.*

- *Para cada* x *em* I, *existe um único* $y = f(x)$ *em* J *tal que* $F(x, y) = 0$.
- *Temos* $f(a) = b$. *A função* $f : I \to J$ *é* diferenciável *e*

$$f'(x) = -\frac{F_x\big(x, f(x)\big)}{F_y\big(x, f(x)\big)}, \text{ para todo } x \text{ em } I.$$

Prova. Dividamos a prova em três partes.

◇ Existência e Unicidade. A derivada da função $\varphi(y) = F(a, y)$ não se anula. Pela Propriedade de Darboux podemos supor $\varphi' > 0$ em todo ponto. Assim, φ é estritamente crescente e pela continuidade de F existe um retângulo não degenerado $I \times [b_1, b_2]$, centrado em (a, b) e com I aberto, tal que

$$F\Big|_{I\times\{b_1\}} < 0 \text{ (na base)} \quad \text{e} \quad F\Big|_{I\times\{b_2\}} > 0 \text{ (no topo)}.$$

Fixando um arbitrário x em I, a função

$$\psi(y) = F(x, y)$$

satisfaz $\psi(b_1) < 0 < \psi(b_2)$. Pelo TVM existe $\eta \in J = (b_1, b_2)$ tal que

$$\psi'(\eta) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, \eta) > 0.$$

Pela Propriedade de Darboux temos $\psi'(y) > 0$ em todo $y \in J$. Pelo TVI,

$$\textit{existe um } \text{único } y = f(x) \in J \textit{ tal que } F\big(x, f(x)\big) = 0.$$

- Continuidade. Sejam $\overline{b_1}$ e $\overline{b_2}$ tais que $b_1 < \overline{b_1} < b < \overline{b_2} < b_2$. Pelo visto acima, existe um intervalo aberto I', contido em I e contendo a, tal que $f(x)$ pertence ao intervalo aberto $(\overline{b_1}, \overline{b_2})$, para todo $x \in I'$. Logo, f é contínua em $x = a$. Por fim, dado a' em I, seja $b' = f(a')$. Então, $f : I \to J$ é uma solução do problema $F\big(x, h(x)\big) = 0$, para todo x em I, com a condição $h(a') = b'$. Assim, pelo que acabamos de mostrar, f é contínua em $x = a'$.

- Diferenciabilidade. Fixemos x em I. Denotemos $\nabla F(x, f(x)) = (\alpha, \beta)$. Como F é diferenciável no ponto $\big(x, f(x)\big)$, temos

$$\begin{cases} F[x+h, f(x)+k] - F[x, f(x)] = \alpha h + \beta k + E(h,k)\|(h,k)\|, \\ \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} E(h,k) = 0. \end{cases}$$

Logo [lembrando que $F[x, f(x)] = 0$ para todo x no domínio de f],

$$\begin{aligned} 0 &= F[x+h, f(x+h)] - F[x, f(x)] = \\ &= \alpha h + \beta[f(x+h) - f(x)] + E[h, f(x+h) - f(x)]\, \big\|\big(h, f(x+h) - f(x)\big)\big\|. \end{aligned}$$

Dividindo por $h \neq 0$, simplificamos os cômputos com as notações

$$\mathcal{D}(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{e} \quad \mathcal{E}(h) = E[h, f(x+h) - f(x)]\frac{|h|}{h}.$$

Assim, temos

$$0 = \alpha + \beta\mathcal{D}(h) + \mathcal{E}(h)\big\|\big(1, \mathcal{D}(h)\big)\big\| \text{ com, pois } f \text{ é contínua, } \ \mathcal{E}(h) \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

Lembrando que $\mathcal{D} = \mathcal{D}(h)$ e $\mathcal{E} = \mathcal{E}(h)$ são funções de $h \neq 0$, escrevemos

$$\alpha + \beta\mathcal{D} = -\mathcal{E}\|(1, \mathcal{D})\|.$$

A seguir, elevando ao quadrado encontramos

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta\mathcal{D} + \beta^2\mathcal{D}^2 = \mathcal{E}^2(1 + \mathcal{D}^2)$$

e então

$$(\beta^2 - \mathcal{E}^2)\mathcal{D}^2 + 2\alpha\beta\mathcal{D} + (\alpha^2 - \mathcal{E}^2) = 0.$$

Como $\mathcal{E}(h) \xrightarrow{h\to 0} 0$, podemos usar a formula quadratica e obtemos

$$\mathcal{D} = \frac{-2\alpha\beta \pm \sqrt{4\alpha^2\beta^2 - 4(\beta^2 - \mathcal{E}^2)(\alpha^2 - \mathcal{E}^2)}}{2(\beta^2 - \mathcal{E}^2)} \xrightarrow{h\to 0} \frac{-2\alpha\beta}{2\beta^2} = -\frac{\alpha}{\beta} \blacksquare$$

Provemos que localmente, em (a, b), a curva de nível 0 de F é o gráfico de f.

Corolário. *Com a notação acima temos, com $Gr(f)$ gráfico de f,*

$$\{(x, y) \in I \times J : F(x, y) = 0\} = Gr(f) = \{(x, f(x)) : x \in I\}.$$

Prova. Imediata$\blacksquare$

REFERÊNCIAS

1. de Oliveira, O. R. B., *The implicit and the inverse function theorems: easy proofs.* To appear in Real Analysis Exchange. See arXiv:1212.2066, 2012

2. de Oliveira, O. R. B., *The Implicit Function Theorem when the matrix $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ is only continuous at the base point.* See arXiv:1312.2445, 2013.

3. U. Dini, *Lezione di Analisi Infinitesimale*, volume 1, Pisa, 1907, 197–241.

4. P. M. Fitzpatrick, *Advanced Calculus*, 2nd ed., Pure and Applied Undergraduate Texts vol. 5, American Mathematical Society, Providence, 2009.

5. Guidorizzi, H. L., *Um Curso de Cálculo*, Vol 2, 5 ed., Editora LTC.

6. Hairer, E., and Wanner, G., *Analysis by Its History*, Springer-Verlag, 1996.

7. S. G. Krantz and H. R. Parks, *The Implicit Function Theorem - History, Theory, and Applications*, Birkhaüser, Boston, 2002.

8. J. Saint Raymond, Local inversion for differentiable functions and the Darboux property, *Mathematika*, **49** (2002), 141–158.

9. Simmons, G., *Cálculo Com Geometria Analítica*, Vol 2, 1 ed., Makron Books.