DÚVIDAS - Cálculo III – MAT 216 – IAGUSP

Primeiro semestre de 2019

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

- Seção 5.4 – Exercício 2(m). Calcule o volume de

$$\{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq a^2 \text{ e } x^2+z^2 \leq a^2, \text{ com } a>0\}.$$

Solução.

◇ Seja V o volume procurado.

Consideremos o disco $D(0,a) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq a^2\}$ no plano xy.

Segue

$$\begin{aligned}
V &= \iint_{D(0,a)} \left[\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dz \right] dxdy \\
&= \iint_{D(0,a)} 2\sqrt{a^2-x^2}\, dxdy \\
&= 2\int_{-a}^{a} \left[\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2} dy \right] dx \\
&= 2\int_{-a}^{a} \left(\sqrt{a^2-x^2} 2\sqrt{a^2-x^2} \right) dx \\
&= 4\int_{-a}^{a} (a^2-x^2) dx \\
&= 8\int_{0}^{a} (a^2-x^2) dx \\
&= 8\left(a^2x - \frac{x^3}{3} \right)\Big|_{x=0}^{x=a} \\
&= 8\left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) \\
&= \frac{16a^3}{3} \clubsuit
\end{aligned}$$

- Seção 5.5 – Exercício 3. Calcule a massa do sólido

$$x^2 + y^2 + z^2 \text{ e } z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$$

supondo que a densidade no ponto (x, y, z) é proporcional à distância deste ponto ao plano xy.

Solução.

◇ O sólido está contido na esfera centrada na origem e de raio 1 e, também, está dentro do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. O sólido é então como um copinho (cônico) de sorvete com sorvete (sabor pistache) dentro.

◇ A projeção do sólido sobre o plano xy é obtida pela intersecção do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ com a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

encontramos a circunferência

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

A projeção do sólido sobre o plano xy é então dada pelo disco/círculo

$$D = D\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

◇ Sejam S o sólido, M a massa do sólido e k a constante de proporcionalidade mencionada.

Então temos

$$
\begin{aligned}
M &= \iiint\limits_S kz\,dxdydz \\
&= \iint\limits_D \left(\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} kz\,dz \right) dxdy \\
&= k \iint\limits_D \left(\frac{z^2}{2}\Big|_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) dxdy \\
&= \frac{k}{2} \iint\limits_D \left(1 - x^2 - y^2 - x^2 - y^2\right) dxdy \\
&= \frac{k}{2} \left[\iint\limits_D 1 dxdy - 2 \iint\limits_D (x^2+y^2) dxdy \right] \\
&= \frac{k}{2} \left[\pi \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - 2 \iint\limits_{\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \times [0,2\pi]} \rho^2 \rho\, d\rho d\theta \right] \\
&= \frac{k}{2} \left[\frac{\pi}{2} - 2 \left(\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \rho^3\, d\rho \right) \left(\int\limits_0^{2\pi} 1 d\theta \right) \right] \\
&= \frac{k}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 2 \times \frac{1}{16} \times 2\pi \right) \\
&= \frac{k}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \\
&= \frac{k\pi}{8} \clubsuit
\end{aligned}
$$

- Seção 9.3 . Exercício 15. Calcule a área da parte do parabolóide elíptico

$$z = x^2 + 2y^2$$

que se encontra dentro do cilindro $4x^2 + 16y^2 \leq 1$.

Solução.

- $\diamond$ Uma parametrização do parabolóide é

$$\sigma(x, y) = (x, y, x^2 + 2y^2).$$

Temos

$$\begin{aligned} \sigma_x \times \sigma_y &= (\overrightarrow{i} + 2x\overrightarrow{k}) \times (\overrightarrow{j} + 4y\overrightarrow{k}) \\ &= \overrightarrow{k} - 4y\overrightarrow{j} - 2x\overrightarrow{i}. \end{aligned}$$

- $\diamond$ Sejam $K = \{(x, y) : 4x^2 + 16y^2 \leq 1\}$ e A a medida da área procurada. Segue

$$\begin{aligned} A &= \iint\limits_K \sqrt{1 + (-4y)^2 + (-2x)^2}dxdy \\ &= \iint_K \sqrt{1 + 4x^2 + 16y^2}dxdy. \end{aligned}$$

Parametrizemos K escrevendo

$$(x, y) = \left(\frac{\rho\cos\theta}{2}, \frac{\rho\sin\theta}{4}\right).$$

- $\diamond$ Concluímos então com

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{8}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 \sqrt{1 + \rho^2}\rho d\rho d\theta \\ &= \frac{2\pi}{16}\int\limits_0^1 \sqrt{1 + \rho^2}\, 2\rho\, d\rho \\ &= \frac{\pi}{8}\left[\frac{2}{3}(1 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1\right] \\ &= \frac{\pi}{12}(2^{\frac{3}{2}} - 1) \\ &= \frac{(2\sqrt{2} - 1)\pi}{12} \clubsuit \end{aligned}$$