MAT2127 - Cálculo II - IQ

Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

$2^{\underline{o}}$ semestre de 2008

Prova Substitutiva

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	

Nome : __________GABARITO__________

$N^{\underline{o}}$USP : ____________________

1. Seja $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$, se $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

   a) f é contínua em $(0,0)$?

   b) Desenhe as curvas de nível de f.

   c) Determine a imagem de f.

V. Exemplo 9, pp 157-158, 'Um Curso de de Cálculo', vol 2, 5ª edição, Guidorizzi.

Resolução

(a) Temos $f(0,t) = 0\,, \forall t \neq 0$, e $f(t^2,t) = 1$, $\forall t \neq 0 \Rightarrow f$ não é contínua e $(0,0)$.

(b) e (c)

Temos $(|u| - |v|)^2 = u^2 - 2|uv| + v^2 \geq 0$, $2|uv| \leq u^2 + v^2$, $\frac{2|uv|}{u^2+v^2} \leq 1$, se $(u,v) \neq (0,0)$ e assim, $-1 \leq \frac{2uv}{u^2+v^2} \leq 1$, se $(u,v) \neq (0,0)$.

Se $c \in [-1,1]$, $\exists (u,v)$ tal que $\frac{2uv}{u^2+v^2} = c:$ para $u = cos\theta$ e $v = sen\theta$ temos $\frac{2uv}{u^2+v^2} = sen2\theta$ e, para $2\theta = arcsen(c)$, $f(cos\theta, sen\theta) = c$. Logo, $Im(f) = [-1,+1]$.

Para as curvas de nível resolvemos $\frac{2xy^2}{x^2+y^4} = c, c \in [-1,1]$, c fixo.

Se $c = 0$ temos $x = 0$ ou $y = 0$, os eixos.

Se $c \neq 0$ temos, $(x,y) \neq 0$, $2xy^2 = cx^2 + cy^4$, ou $cx^2 - 2y^2x + cy^4 = 0$, e

$$x = \frac{2y^2 \pm \sqrt{4y^4 - 4c^2y^4}}{2c} \;=\; y^2\Big(\frac{1 \pm \sqrt{1-c^2}}{c}\Big)\;.$$

Para $c > 0$ temos duas parábolas e para $c < 0$ também, todas aproximando-se de $(0,0)$ quando (x,y) tende a $(0,0)$. Vide desenho no livro $\blacksquare$

2. Utilize a regra de cadeia para determinar $\dfrac{\partial u}{\partial p}$, $\dfrac{\partial u}{\partial r}$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}$;

com $u(x, y, z) = 2x - y + 2z$, $\begin{cases} x = p + r + t \\ y = p - r + t \\ z = p + r - t \end{cases}$

Resolução:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial p} \\ \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

3. Admita que o gráfico de $z = xy$ representa uma superfície própria para a prática de esqui e que um esquiador deslize pela superfície e sempre na direção de maior declive. Se ele parte do ponto $(1, 2, 2)$, em que ponto ele tocará o plano xy?

Vide Exercício 12, pg. 270, 'Um Curso de Cálculo', vol 2, 5ª edição, H.L. Guidorizzi.

Resolução

Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ a projeção da trajetória sobre o plano e $z = f(x, y)$.

Então, $\gamma'(t) = \langle x'(t)\,,\, y'(t)\rangle$ é paralelo a $\vec{\nabla} f(\gamma(t)) = \vec{\nabla} f(\,x(t), y(t)\,) = \langle\, y(t), x(t)\,\rangle$. Logo,

$$0 \;=\; \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ y(t) & x(t) \end{vmatrix} = xx' - yy' = \frac{d}{dt}\left\{\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right\},$$

e assim, $x(t)^2 - y(t)^2 = c$, $c \in \mathbb{R}$ e, supondo $\gamma(1) = (1, 2)$ temos $c = -3$.

Assim, uma parametrização da trajetória é,

$$\Gamma(t) \;=\; (t,\, \sqrt{t^2 + 3},\, t\sqrt{t^2 + 3})\;.$$

O alpinista toca o solo quando a terceira coordenada de $\Gamma(t)$ é zero, o que ocorre para $t = 0$ e neste caso, o ponto procurado é:

$$(0\,,\sqrt{3}\,,0) \qquad \blacksquare$$

4. Determine os pontos mais afastados da origem e cujas coordenadas estão sujeitas às restrições $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ e $x + y + z = 1$.

Vide Exemplo resolvido 6, pp 330-331, 'Um Curso de Cálculo', vol 2, 5ª edição, H.L. Guidorizzi.

Resoluções

Primeira Elementar e sem multiplicadores de Lagrange.

O máximo de $D^2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ é, como $x^2 + y^2 + z^2 \leq x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$, quatro (4), obtido para $y = 0$. Substituindo temos, $x^2 + z^2 = 4$ e $z = 1 - x$. Logo, $x^2 + (1 - x)^2 = 4 = 2x^2 - 2x + 1$ e, $2x^2 - 2x - 3 = 0$ e portanto,

$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}\,,\ z = \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{7}}{2}\,,\ P_1 = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}\,, 0\,, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2})\,,\ P_2 = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}\,, 0\,, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2})\,.$$

Segunda

Como $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ pertencem ao interior do elipsóide e ao plano, a intersecção é compacta não vazia e $D^2 = x^2 + y^2 + z^2$ têm aí máximo e mínimo. Os pontos críticos de $D^2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeito às restrições satisfazem,

$$\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 8y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} (P_o) \;=\; 0.$$

Logo,

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x & 4y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x(4y - z) - y(x - z) + z(x - 4y) \;= 3xy - 3yz = \; 0.$$

Logo, $3y(x - z) = 0$ e portanto, $y = 0$ ou $z = x$.

De $y = 0$ temos $x^2 + z^2 = 4$ e $x + z = 1$. Logo, $x^2 + (1 - x)^2 = 4$ ou, $2x^2 - 2x - 3 = 0$ e assim, $x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$ e $z = 1 - (\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}) = \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{7}}{2}$). Temos,

$$P_1 = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}) \quad , \quad P_2 = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}) \ .$$

De $z = x$ temos $x^2 + 2y^2 = 2$, e $y = 1 - 2x$. Portanto, $x^2 + 2(1 - 2x)^2 = 2$ e assim, $9x^2 - 8x = x(9x - 8) = 0$. Logo, $x = 0$ ou $x = \frac{8}{9}$. Temos então os pontos,

$$P_3 = (0, 1, 0) \quad , \quad P_4 = (\frac{8}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{8}{9}) \ .$$

Calculando, temos $D^2(0, 1, 0) = 1$, $D^2(\frac{8}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{8}{9}) = \frac{171}{81}$ e $D^2(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{7}}{2}) = 4$. Logo, P_1 e P_2 tem máxima distância à origem e $(0, 1, 0)$ de mínima ■

5. Estude com relação a máximos e mínimos locais a função $f(x,y,z) = x^3 + 2xy + y^2 + z^2 - 5x - 4z$.

Vide

Exercício 15 (c), pp 317, 'Um Curso de Cálculo', vol 2, 5ª edição, H. L. Guidorizzi.

Exercício 18 (d) da lista 6.

Exercício 7(b) da lista 7.

Resolução

Pontos críticos: De $\vec{\nabla} f(P) = \langle 3x^2 + 2y - 5\,, 2x + 2y\,, 2z - 4 \rangle = 0$ temos, $z = 2$, $y = -x$ e $3x^2 - 2x - 5 = 3(x+1)(x - \frac{5}{3}) = 0$. Logo,

$$P_1 = (-1, 1, 2) \quad , \quad P_2 = (\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 2)\ .$$

Hessiano: Temos, $f_{xx} = 6x\,, f_{xy} = 2\,, f_{xz} = 0\,, f_{yz} = 0\,, f_{yy} = 2\,, f_{zz} = 2$ e então,

$$H(f) = \begin{vmatrix} 6x & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(12x - 4) \qquad H_1(f) = \begin{vmatrix} 6x & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (12x - 4)\ .$$

Logo, $H_1 f(P_1) = -16 < 0$ e assim, P_1 é ponto de sela ou, ainda, a diagonal de $\mathcal{H}f(P_1)$, a matriz hessiana de f em P_1, troca de sinal e então, o ponto é de sela.

Por último, $Hf(P_2) = 32 > 0$, $H_1 f(P_2) = 16 > 0$ e $f_{xx}(P_2) = 10 > 0$ e portanto, o ponto P_2 é de mínimo local $\blacksquare$

6. Determine

a) A solução geral de $\dfrac{d^4x}{dt^4} - x = t^2$.

b) A solução particular $x_p(t)$ de (a) tal que $x_p(0) = x_p'(0) = x_p''(0) = x_p'''(0) = 0$.

Vide Exercício 8(b), pg 291, 'Um Curso de Cálculo', vol 4, 5ª edição, H. L. Guidorizzi.

Resolução

(a) Temos, $p(\lambda) = \lambda^4 - 1 = (\lambda^2-1)(\lambda^2+1) = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-i)(\lambda+i)$. Logo, a solução geral da homogênea é:

$$x_h = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3cost + c_4sent \ , \ c_i \in \mathbb{R}$$

Obviamente, existe solução particular polinomial $Q(t)$, grau$(Q) = 2$. Logo, $Q^{(iv)} = 0$ e, substituindo na equação obtemos $-Q(t) = t^2$ e, $x_p = Q(t) = -t^2$.

Assim, a solução geral é:

$$x_G = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3cost + c_4sent \ - \ t^2 \ .$$

(b) Temos,

$$\begin{cases} x_G &= c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3cost + c_4sent - t^2 \\ x_G' &= c_1e^t - c_2e^{-t} - c_3sent + c_4cost - 2t \\ x_G'' &= c_1e^t + c_2e^{-t} - c_3cost - c_4sent - 2 \\ x_G''' &= c_1e^t - c_2e^{-t} + c_3sent - c_4cost \ . \end{cases}$$

Substituindo em $t = 0$ obtemos,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 - c_2 + c_4 = 0 \\ c_1 + c_2 - c_3 = 2 \\ c_1 - c_2 - c_4 = 0 \ . \end{cases}$$

Cuja solução é, $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = -1$ e $c_4 = 0$. Logo, a solução para (b) é:

$$x(t) = \frac{e^t}{2} + \frac{e^{-t}}{2} - cost - t^2 \qquad \blacksquare$$