MAT2127- CÁLCULO II - IQUSP - 2 SEMESTRE de 2009

Professor Oswaldo Rio Branco

Fórmulas[1] de Taylor[2] com Resto Integral, Infinitesimal, e de Lagrange

Almejamos aproximar o valor de uma função f num ponto x_0 pelos valores de um polinômio em pontos próximos de x_0. Exibimos fórmulas e condições em que dada f n-vezes derivável em x_0 ocorra tal aproximação com um polinômio de grau no máximo n.

As fórmulas mais potentes correspondem àquelas com hipóteses mais fortes: a com resto infinitesimal só requer existir $f^{(n)}(x_0)$, a com resto de Lagrange é fácil de aplicar, requer a existência de $f^{(n+1)}$ numa vizinhança de x_0 e generaliza o TVM, e a com resto integral necessita $f^{(n+1)}$ integrável e restabelece parte do Teorema Fundamental do Cálculo.

Fórmula de Taylor com Resto Integral

Observação 1. Seja $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que existem as derivadas $\varphi^{(k)}$, $k = 1, ..., n+1$, com $\varphi^{(n+1)}$ integrável. Integrando sucessivamente por partes obtemos,

$$\begin{aligned}
\varphi(1) - \varphi(0) &= \int_0^1 \varphi'(t)dt = \int_0^1 1.\varphi'(t)dt \qquad (\text{substituamos } u' = 1 \text{ e } v = \varphi') \\
&= t\varphi'(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 t\varphi''(t)dt \\
&= \varphi'(1) - \int_0^1 t\varphi''(t)dt \\
&= \varphi'(0) + \varphi'(1) - \varphi'(0) \ - \int_0^1 t\varphi''(t)dt \\
&= \varphi'(0) + \int_0^1 \varphi''(t)dt - \int_0^1 t\varphi''(t)dt \\
&= \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)dt \qquad (\text{pomos } u' = 1-t \text{ e } v = \varphi'') \\
&= \varphi'(0) \ - \ \frac{(1-t)^2}{2}\varphi''(t)\Big|_0^1 \ + \ \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}\varphi'''(t)dt \\
&= \varphi^{(1)}(0) + \frac{\varphi^{(2)}(0)}{2} + \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}\varphi^{(3)}(t)dt \qquad (\text{pomos } u' = \tfrac{(1-t)^2}{2} \text{ e } v = \varphi^{(3)}) \\
&= \varphi^{(1)}(0) + \frac{\varphi^{(2)}(0)}{2!} + \frac{\varphi^{(3)}(0)}{3!} \ + \ \int_0^1 \frac{(1-t)^3}{3!}\varphi^{(4)}(t)dt = \\
&. \\
&. \\
&= \varphi^{(1)}(0) + \frac{\varphi^{(2)}(0)}{2!} + \frac{\varphi^{(3)}(0)}{3!} \ + \ ... \ + \ \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} \ + \ \int_0^1 \frac{\varphi^{(n+1)}(t)}{n!}(1-t)^n dt \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

[1] A ordem de apresentação escolhida não segue o "principio do menos geral para o mais geral" e também não a linha histórica (neste tópico tais opções conflitam). A ordem adotada é a que julgamos mais simples. A abordagem segue uma interpretação aritmética do 2 Teorema Fundamental do Calculo.

[2] B. Taylor, matemático inglês, publicou em 1715 a descoberta da hoje dita série de Taylor de uma função f.

Teorema 1 (Taylor)[3] Seja $f : I = (c,d) \to \mathbb{R}$, com $f^{(n+1)}$ integrável. Para $x_0, x \in I$ temos

$$f(x) = f(x_0)+f^{(1)}(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+....+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\int_{x_0}^{x}\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt\,.$$

Prova:

Consideremos $\varphi(t) = f\big(x_0 + t(x - x_0)\big)$, para $t \in [0,1]$. Pela Observação 1 segue,

$$\begin{cases} \varphi(0) = f(x_0) \\ \varphi(1) = f(x) \\ \varphi'(t) = f'\big(x_0 + t(x-x_0)\big)(x-x_0) \\ \varphi''(t) = f''\big(x_0 + t(x-x_0)\big)(x-x_0)^2 \\ . \\ . \\ . \\ \varphi^{(k)}(t) = f^{(k)}\big(x_0 + t(x-x_0)\big)(x-x_0)^k\,, \quad 1 \le k \le n+1\,, \end{cases}$$

logo, as derivadas de φ na origem são,

$$\varphi^{(k)}(0) = f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k\,, \quad \text{se } 1 \le k \le n+1\ , \text{ com}$$

$$\int_0^1 \frac{\varphi^{(n+1)}(t)}{n!}(1-t)^n dt \;=\; \int_0^1 \frac{f^{(n+1)}\big(x_0+t(x-x_0)\big)(x-x_0)^{n+1}}{n!}(1-t)^n\,dt \;=$$

$\Big[$com a mudança linear de variável $t \mapsto y = x_0 + t(x-x_0)$, $dy = (x-x_0)dt$ e $t = \frac{y-x_0}{x-x_0}\Big]$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(y)(x-x_0)^{n+1}}{n!}\Big(1-\frac{y-x_0}{x-x_0}\Big)^n \frac{dy}{x-x_0}$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n dy\ .$$

Por fim, substituimos tais expressões para φ na equação obtida na Observação 1. ∎

O polinômio $P(x) = P_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$, de grau no máximo n, é o **polinômio de Taylor de ordem n de f no ponto x_0,** e $R(x) = R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ é o **resto**. A expressão $R(x) = R(x_0;x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$ é a **forma integral do resto**.

Corolário 1. Com as notações acima, se $|f^{(n+1)}(t)| \le M\,, M > 0\,, \forall t$ entre x_0 e x, então

$$(a) \qquad |R(x)| \le C|x-x_0|^{n+1}\,, \quad C = \frac{M}{(n+1)!}.$$

$$(b) \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x-x_0)^n} = 0\ .$$

Prova: O item (b) segue imediatamente de (a). O item (a) é trivial pois

$$|R(x)| \le \frac{M}{n!}\Big|\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,dt\Big| = \frac{M}{n!}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{n+1} \quad ∎$$

[3]A Fórmula de Taylor com Resto Integral e a idéia contida nesta prova (a simplificação escolhida é culpa do autor) devem-se a Cauchy (1821), que aperfeiçoou uma idéia de Johann I Bernoulli (1694), que com integração por partes obtivera séries de Taylor similares as publicadas por B. Taylor em 1715.

As afirmações no Corolário 1 podem reescritas introduzindo uma notação muito útil.

Definição 1. Se $g(x)$ e $h(x)$ são duas funções definidas numa vizinhança de x_0 temos

$$(a) \quad g(x) = O\big(h(x)\big)\,, \quad \text{se existe } C > 0 \text{ tal que } \begin{cases} |g(x)| \le C|h(x)|\,, \\ \text{para todo } x \text{ numa vizinhança de } x_0 \end{cases}$$

$$(b) \quad g(x) = o\big(h(x)\big)\,, \text{ para } x \to x_0\,, \quad \text{se} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = 0\,.$$

Desta forma, reescrevemos o Corolário 1 como

Corolário 1'. Com as notações acima, se $|f^{(n+1)}(t)| \le M\,, M > 0\,, \forall t$ entre x_0 e x, então

$(a) \quad R(x) = O\big((x - x_0)^{n+1}\big)\,, \quad$ se $x \to x_0$.

$(b) \quad R(x) = o\big((x - x_0)^{n}\big)\,, \quad$ se $x \to x_0$.

Prova: Óbvio ■

A condição (b) no Corol. 1' exprime a "ordem de contato" entre duas funções g e h n-vezes deriváveis em x_0 : isto é, $g - h = o\Big((x - x_0)^n\Big)$ se e só se $g(0) = h(0)\,, \ldots .g^{(n)}(0) = h^{(n)}(0)$ sendo que para os nosso propósitos é suficiente verificar um caso particular e simples[4].

Obs 2. Se $Q(x)$ é um polinômio de grau no máximo n e $\lim_{x \to x_0} \frac{Q(x)}{(x - x_0)^n} = 0$ então $Q \equiv 0$.

Prova:

Pela translação $x \mapsto x_0 + (x - x_0)$ temos $Q(x) = a_n(x - x_0)^n + \ldots + a_1(x - x_0) + a_0$ e

$$(*) \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{a_n(x - x_0)^n + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + \ldots + a_1(x - x_0) + a_0}{(x - x_0)^n} = 0\,,$$

e como para $x \to x_0$ o limite do numerador é a_0 e o do denominador é 0, temos $a_0 = 0$. Eliminando na fração em (*) $a_0 = 0$ e um fator $(x - x_0)$ e repetindo o argumento temos $a_1 = 0$ e assim, sucessivamente todos os coeficientes de Q são nulos e portanto $Q \equiv 0$ ■

Com tal observação estabelecemos a unicidade do polinômio de Taylor a qual é importante pois nos possibilita reconhece-lo facilmente em meio a computações.

Corolário 2 (A Unicidade do Polinômio de Taylor). Com as hipóteses do Teorema 1, se $Q = Q(x)$ é um polinômio de grau menor ou igual a n satisfazendo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - Q(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

então Q é o polinômio de Taylor de ordem n em x_0.

Prova: Trivial pois pelo Corolário 1, se $P(x) = P_n(x)$ é o polinômio de Taylor de ordem n de f em x_0 então $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)^n} = 0$. Assim, devido às hipóteses,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x) - Q(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \Big[\frac{P(x) - f(x)}{(x - x_0)^n} + \frac{f(x) - Q(x)}{(x - x_0)^n} \Big] = 0$$

e assim, pela Observação 2, $P - Q \equiv 0$ ■

[4]Para o caso geral vide Lima, Elon L. - Curso de Análise, Vol 1, pp 221-222, Rio de Janeiro, IMPA, 1976.

Exemplo 1 As fórmulas de Taylor com resto integral das funções e^x, $\cos x$ e $\sin x$, $x \in \mathbb{R}$, com seus respectivos polinômios de Taylor P_n, P_{2n+1} e P_{2n+2} e restos no ponto $x_0 = 0$ são,

$$(a)\ e^x \ = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{e^t}{n!}(x-t)^n\, dt \quad = \quad P_n(x) + R_n(x)$$

$$(b)\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \int_0^x \frac{\cos^{(2n+2)}(t)}{(2n+1)!}(x-t)^{2n+1}\, dt \ = P_{2n+1}(x) + R_{2n+1}(x)$$

$$(c)\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \int_0^x \frac{\sin^{(2n+3)}(t)}{(2n+2)!}(x-t)^{2n+2}\, dt \ = P_{2n+2}(x) + R_{2n+2}(x)\ .$$

Verificação: Basta utilizar o Teorema 1 (Taylor) e as observações abaixo

(a) A sequência ordenada dos números $\exp^{(n)}(0)$, $m = 0, 1, 2, ...,$ é $(1, 1, 1, 1, ...)$.

(b) A sequência ordenada dos números $\cos^{(m)}(0)$, $m = 0, 1, 2, ...,$ é $(1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, ...)$.

(c) A sequência ordenada dos números $\sin^{(m)}(0)$, $m = 0, 1, 2, ...,$ é $(0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, ...)$ ∎

As fórmulas acima foram fáceis de calcular por terem sido triviais o cômputo das derivadas na origem. No exemplo a seguir, para $f(x) = \arctan x$, tal cômputo direto é árduo mas contornável. Note que o resto obtido, dado por uma integral, não tem a forma do resto na fórmula de Taylor com resto integral. Ainda assim, estes restos são iguais como funções.

Exemplo 2. Para arctan x, em $x_0 = 0$, valem as seguintes fórmulas com resto integral

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ...(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ + \ (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt = P_{2n+1}(x) \ + R_{2n+1}(x).$$

Verificação:

Utilizando a fórmula para a soma finita dos termos de uma PG finita,

$$1 + r + r^2 + ... + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}\ ,\ \text{se } r \neq 1\,,$$

temos

$$\arctan' t = \frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 + ... + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}, \forall t \in \mathbb{R}\ .$$

Logo, integrando e notando que $\arctan 0 = 0$,

$$\arctan x = \int_0^x \arctan' t\, dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ...(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ + \ (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\ ,$$

e pelo Corol. 2, o polinômio surgido é o de Taylor de ordem $2n+1$ de $\arctan x$ em 0 pois

$$\frac{1}{|x|^{2n+1}} \left| (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt \right| \leq \frac{1}{|x|^{2n+1}} \left| \int_0^x t^{2n+2}\, dt \right| \ = \ \frac{x^2}{2n+3} \longrightarrow 0\,,\ \ \text{se } x \to 0\ .$$

Por fim, $(-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt = \arctan x - P_{2n+1}(x) = R_{2n+1}(x)$ ∎

No Exemplo 2 a expressão para o resto é bem mais simples que a dada pela fórmula de Taylor com resto integral. Ainda mais, na primeira x é apenas um extremo de integração enquanto que na segunda x surge como extremo de integração e também no integrando.

Outra importante função é a logarítmica e ao invés de $\log x$ é mais prático considerar a função $\log(1+x)$ cujo cômputo das derivadas não é dificil pois $\log^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{(k-1)}(k-1)!}{x^k}$. Porém, como a forma integral do resto para $\log(1+x)$ é difícil de estimar procedemos como no caso da função $\arctan x$ e relacionamos $\frac{d}{dx}\{\log(1+x)\}$ com a soma de uma PG.

Exemplo 3. Para $\log(1+x)$, $x > -1$, em $x_0 = 0$ valem as fórmulas com resto integral

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt = P_n(x) + R_n(x) .$$

Verificação:

Utilizando, como no Exemplo 2, a fórmula $1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$, se $r \neq 1$, temos

$$\log'(1+t) = \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \ldots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t} , \forall t > -1 ,$$

e então integrando,

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\,dt .$$

Pelo Corolário 2 o polinômio surgido é o de Taylor de ordem n pois analisando

$$\frac{1}{|x|^n}\Big| \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt\Big|$$

vemos que para $x > 0$ temos $0 \leq t \leq x$ e $1 + t \geq 1$ e

$$0 \leq \frac{1}{x^n} \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \leq \frac{1}{x^n} \int_0^x t^n\,dt = \frac{x}{n+1} \longrightarrow 0 \ \text{ quando } x \to 0 ;$$

e para o caso $-1 < x < 0$ temos $-1 < x \leq t \leq 0$ e $0 < 1 + x \leq 1 + t$ e portanto,

$$\Big|\frac{1}{x^n} \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt\Big| \leq \frac{1}{|x|^n} \frac{1}{1+x} \int_x^0 |t|^n\,dt = \frac{|x|}{(n+1)(1+x)} \longrightarrow 0 \ \text{ quando } x \to 0 \quad \blacksquare$$

Exemplo 4 Para $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ e $x > -1$, as fórmulas de Taylor com resto integral em $x_0 = 0$ são

$$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + R_n(x) ; \quad R_n(x) = \int_0^x \frac{f^{n+1}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt ,$$

$$\text{com } \binom{\alpha}{m} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m+1)}{m!} , \forall m \in \mathbb{N}, m \geq 1 , \ \text{ e } \binom{\alpha}{0} = 1 .$$

Verificação:

Basta notar que $f(x) = (1+x)^\alpha = e^{\alpha\log(1+x)} \in C^\infty(-1,+\infty)$ e aplicar o Teorema de Taylor observando as fórmulas para as sucessivas derivadas de f,

$$f^{(m)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots.(\alpha-m+1)(1+x)^{\alpha-m} \ \text{ e } \ f^{(m)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots.(\alpha-m+1) = \binom{\alpha}{m}m! \quad \blacksquare$$

Uma questão fundamental que surge no caso de $f \in C^\infty(c,d)$ é saber se a aproximação é tanto melhor quanto maior a ordem do polinômio de Taylor. Isto é, desejamos saber se dado $x_0 \in (c,d)$ e $P_n(x)$ o polinômio de Taylor de f em x_0 temos $\lim_{n\to+\infty} P_n(x_0) = f(x_0)$. Analisaremos tal questão após apresentarmos a Fórmula de Taylor com resto de Lagrange.

A seguir vemos a útil Fórmula de Taylor com resto infinitesimal, que não requer $f \in C^\infty$.

A Fórmula de Taylor com Resto Infinitesimal

Esta é a mais simples das fórmulas de Taylor, já que não supõe a existência de $f^{(n+1)}$. Nesta seção mostramos que se f é n-vezes derivável em x_0, podemos aproximar os valores de $f(x)$, com x próximo de x_0, pelos de um polinômio $P_n(x)$ de grau menor ou igual a n,

$$f(x) = P_n(x) + R(x)\,, \quad \text{com } R(x) = R(x_0; x)\,,$$

tal que o resto (ou erro) nesta aproximação, $R(x) = f(x) - P_n(x)$ satisfaz a propriedade

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Tal limite pode ser interpretado como "o resto $R(x)$ tende a zero mais rapidamente que $(x-x_0)^n$ tende a zero, quando x tende a x_0" ou ainda, utilizando a translação $h \mapsto x = x_0 + h$, definindo $r(h) = R(x_0+h)$ e $p_n(h) = P_n(x_0+h)$ e escrevendo

$$f(x_0+h) = p_n(h) + r(h)\,, \quad \text{com } \lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h^n} = 0\,,$$

"o resto $r(h)$ é um infinitésimo de ordem superior a n em relação a h". Este fato permite estimar o erro e deduzir propriedades de f através de uma tal aproximação.

Abaixo, por instrutivos e úteis, destacamos os casos f 1-derivável e f 2-derivável. Após, a unificação dos argumentos e a generalização para f n-derivável é curta mas "densa".

Proposição 1. Sejam $\delta > 0$ e $f : (a-\delta\,, a+\delta) \to \mathbb{R}$. Então,

(a) Se f é derivável em a e $|h| < \delta$ temos,

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r(h)\,, \quad \text{com } \lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h} = 0\ .$$

(b) Se f é duas vezes derivável em a e $|h| < \delta$ temos,

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + r(h)\,, \quad \text{com } \lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h^2} = 0\ .$$

Prova:

(a) Pela definição de $f'(a)$ segue que,

$$\lim_{h\to 0}\Big[\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h}\Big] = \lim_{h\to 0}\Big[\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)\Big] = f'(a) - f'(a) = 0\ .$$

(b) Como existe $f''(a)$ então f' é definida numa vizinhança do ponto a e portanto $r(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h - \frac{f''(a)}{2!}h^2$ é derivável numa vizinhança da origem. Ainda, por ser derivável f é contínua e $\lim_{h\to 0} r(h) = 0$. Assim, pela Regra de L'Hospital,

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{r'(h)}{2h} = \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\Big[\frac{f'(a+h)-f'(a)-f''(a)h}{h}\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\Big[\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h} - f''(a)\Big] = 0 \quad \blacksquare$$

Baseados na Proposição 1 temos, de acordo com as hipóteses, as interpretações abaixo para as aproximações de $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$, $\delta > 0$, localmente em x_0.

Aproximação Linear: Supondo f derivável em x_0 e

$$T : T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$, vide Figura 1, temos

$$f(x) = T(x) + E(x) \ , \quad \lim_{x \to x_0} \frac{E(x)}{x - x_0} = 0 \ .$$

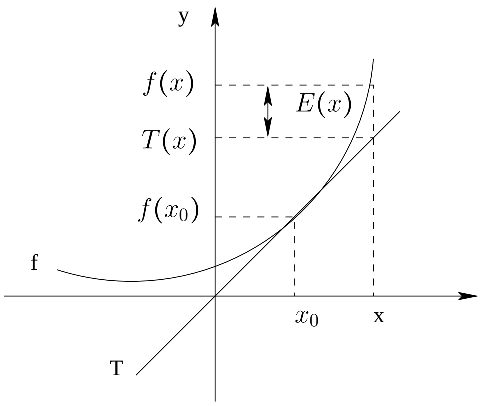

Figura 1: Aproximação Linear

Aproximação por um polinômio de grau 2: Se f é 2-vezes derivável em x_0 temos,

$$f(x) = P_2(x) + E(x) \, , \quad \lim_{x \to x_0} \frac{E(x)}{(x - x_0)^2} = 0 \ .$$

$$P_2 : P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \ .$$

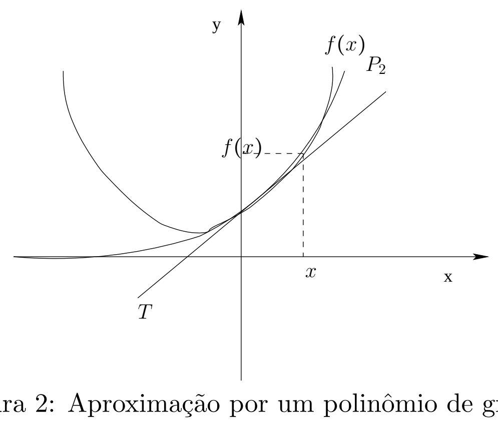

Figura 2: Aproximação por um polinômio de grau 2.

Pela Proposição 1 e o Teorema 1, de Taylor, é fácil intuir o que segue.

Teorema 2. Sejam $\delta > 0$ e $f : (a-\delta\,, a+\delta) \to \mathbb{R}$ n-vezes derivável em a e $|h| < \delta$. Então,

$$(2.1)\ \ f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + r(h)\,, \quad \text{com} \quad \lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h^n} = 0\,.$$

ou, equivalentemente,

$$(2.2)\ \ f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + h^n E(h)\,, \quad \text{com} \quad \lim_{h\to 0} E(h) = 0\ .$$

Prova:

A equivalência entre as expressões (2.1) e (2.2) é trivial, e optamos por provar (2.1).

Como existe $f^{(n)}(a)$, segue que f é $(n-1)$-vezes derivável numa vizinhança de a e portanto $r(h) = f(a+h) - p(h)$ é $(n-1)$-vezes derivável numa vizinhança da origem.

Claramente $p(h)$ é tal que $p^{(k)}(0) = f^{(k)}(a)$, se $0 \le k \le n$, e as derivadas de tais ordens de $r(h) = f(a+h) - p(h)$ se anulam na origem. Assim, como as derivadas até ordem $n-1$ de h^n se anulam na origem, aplicando a regra de L'Hospital $(n-1)$-vezes obtemos

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h^n} = \lim_{h\to 0}\frac{r^{(n-1)}(h)}{n(n-1)...2.\,h} = \frac{1}{n!}\lim_{h\to 0}\frac{r^{(n-1)}(h) - r^{(n-1)}(0)}{h-0} = \frac{1}{n!}r^{(n)}(0) = 0 \quad \blacksquare$$

Com tal fórmula é simples aperfeiçoar e generalizar o **Teste da Derivada Segunda** que estabelece: dada $f \in C^2(c,d)$ e $a \in (c,d)$ com $f'(a) = 0$ temos,

(i) se $f''(a) > 0$ então a é ponto de mínimo local de f ,

(ii) se $f''(a) < 0$ então a é ponto de máximo local de f.

Notando que tal teste nada afirma se $f'(a) = f''(a) = 0$, provemos o resultado abaixo.

Proposição 2. Seja $f \in C^{n-1}(c,d)$, $n \ge 2$, e $a \in (c,d)$ tal que existe $f^{(n)}(a)$ e

$$f'(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(n)}(a) \neq 0\ .$$

(a) Supondo n par temos,

  (i) Se $f^{(n)}(a) > 0$ então a é ponto de mínimo local estrito de f.

  (ii) Se $f^{(n)}(a) < 0$ então a é ponto de máximo local estrito de f.

(b) Se n é ímpar então a não é ponto nem de mínimo local nem de máximo local, de f.

Prova:

Pelas hipóteses e pelo Teorema 2 temos,

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + E(h)h^n\,, \quad \lim_{h\to 0} E(h) = 0\ .$$

Logo, supondo $|h|$ suficientemente pequeno e $h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + E(h)\quad .$$

Notemos que como $E(h) \to 0$ se $h \to 0$ e $f^{(n)}(a) \neq 0$, para $0 \neq |h|$ suficientemente pequeno os sinais de $f^{(n)}(a)$ e $\frac{f(a+h)-f(a)}{h^n}$ são iguais e, no caso n par, é igual ao de $f(a+h) - f(a)$.

Consequentemente, para h suficientemente pequeno e $h \neq 0$ temos,

(a) (i) n par e $f^{(n)}(a) > 0 \Rightarrow f(a+h) - f(a) > 0$ e a é ponto de mínimo local estrito.

(ii) n par e $f^{(n)}(a) < 0 \Rightarrow f(a+h) - f(a) < 0$ e a é ponto de máximo local estrito.

(b) Se n é ímpar, a expressão $f(a+h) - f(a)$ muda de sinal segundo h muda de sinal ■

Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange[5]

Esta fórmula é uma generalização do Teorema do Valor Médio (TVM).

Teorema 3. Seja $f : (c,d) \to \mathbb{R}$ tal que existem $f^{(i)}$, $1 \leq i \leq n+1$, n um natural fixo. Então, dados $x_0, x \in (c,d)$, x_0 fixo, existe $\xi = \xi(x)$ entre x_0 e x, com $\xi \neq x_0$ e $\xi \neq x$, tal que

$$f(x) = f(x_0) + \ f'(x_0)(x - x_0) + \ ... \ + \ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \ + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \ .$$

Prova:

Pelo Teorema do Valor Médio $\exists\, \xi_1$ entre x e x_0, $\xi_1 \neq x_0$, $\xi_1 \neq x$, com $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi_1)$ e,

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi_1)(x - x_0) \ .$$

Seja $\eta \in \mathbb{R}$ determinado pela equação (*) $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \eta(x - x_0)^2$. Então, trocando x_0 por t definimos (a troca x por t requereria aplicar o TVM 2-vezes, verifique),

$$\varphi(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \eta(x-t)^2 \text{ satisfaz } \ \varphi(x_0) = 0 = \varphi(x) \ .$$

Logo, existe ξ_2 entre x_0 e x, $\xi_2 \neq x_0$ e $\xi_2 \neq x$, tal que $\varphi'(\xi_2) = 0$. Porém,

$$\varphi'(t) = -f'(t) - f''(t)(x-t) + f'(t) + 2\eta(x-t) = \big[2\eta - f''(t)\big](x-t),$$

e avaliando tal identidade em ξ_2 obtemos $2\eta - f''(\xi_2) = 0$, $\eta = \frac{f''(\xi_2)}{2!}$ e, devido a (*),

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(x - x_0)^2 \ .$$

De forma análoga, determinando λ pela equação

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - ... - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \lambda(x - x_0)^{n+1} \ ,$$

e trocando x_0 por t definimos a função derivável $\psi(t)$[6], t entre x_0 e x,

$$\psi(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 ... - \frac{f^n(t)}{n!}(x-t)^n - \lambda(x-t)^{n+1} \ ; \ \psi(x_0) = 0 = \psi(x),$$

[5] J. L. Lagrange (1797), matemático francês.

[6] A troca $x \mapsto t$ conduz a uma segunda prova, mais longa, ao aplicarmos indutivamente o TVM n-vezes.

cuja derivada é a soma abaixo, em que cada segundo termo entre colchetes cancela com o primeiro termo entre os dois colchetes imediatamente anteriores,

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= \big[-f'(t)\big] + \big[-f''(t)(x-t) + f'(t)\big] + \big[-\tfrac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2 + f''(t)(x-t)\big] ......+ \\ &+ .... + \big[-\tfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \tfrac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\big] + \lambda(n+1)(x-t)^n = \\ &= -\tfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \lambda(n+1)(x-t)^n \ .\end{aligned}$$

Uma vez mais, existe ξ entre x_0 e x, $\xi \neq x_0$ e $\xi \neq x$, tal que $\psi'(\xi) = 0$ e portanto,

$$\lambda(n+1)(x-\xi)^n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \Longrightarrow \lambda = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad \blacksquare$$

A expressão $R(x_0;x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ é a **forma de Lagrange do resto**.

Comentários

(1) O cuidado para que ξ esteja entre x_0 e x, $\xi \neq x_0$ e $\xi \neq x$ pode ser em uma primeira abordagem negligenciado porém, é em determinadas estudos importante.

(2) Em geral utilizamos a fórmula de Taylor com resto de Lagrange, por prática. Seu inconveniente provém de desconhecermos o ponto "ξ". A forma integral do resto é "melhor" pois mais precisa e define uma função $x \to \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-x_0)^n\,dt$ contínua se $f^{(n+1)}$ é integrável e cuja classe de diferenciabilidade é C^{p+1} se $f^{(n+1)} \in C^p$.

A fórmula de Taylor com resto de Lagrange é facilmente deduzível de sua correlata com resto integral, supondo $f^{(n+1)}$ contínua. Para tal é útil o simples e belo resultado abaixo.

Segundo Teorema do Valor Medio para Integrais[7]: Sejam $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, tais que f é contínua e $g \geq 0$ é integrável e $\int_a^b g(t)dt > 0$. Então, existe $\xi \in (a,b)$ tal que

$$(*) \qquad \frac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt} = f(\xi) \ .$$

Prova:

Sejam $m = f(x_1)$ e $M = f(x_2)$ o mínimo e máximo de f, respectivamente. Então, $\forall x \in [a,b]$ temos $m \leq f(x) \leq M$ e ainda, $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$. Consideremos

$$\gamma = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \in [m,M] \ .$$

Caso 1: Se $m < \gamma < M$, pelo TVI existe $\xi \in (x_1,x_2)$ $\big[$ou $(x_2,x_1)\big]$ tal que $f(\xi) = \gamma$.

Caso 2: Se $\gamma = M$ então $\int_a^b [M - f(x)]g(x)\,dx = 0$ e portanto, como $[M - f(x)]g(x) \geq 0$, temos $[M - f(x)]g(x) = 0\,, \forall x \in [a,b]$, e como g não se anula em algum intervalo aberto J, segue que f é então constante e igual a M em J e assim, todo ξ em J satisfaz (*).

Caso 3: $(\gamma = m)$ Análogo ao caso 2 $\blacksquare$

[7]Interpretação: uma função contínua assume a sua média ponderada por $g \geq 0$ se $\int g\,dt > 0$. Ainda, aceitando $\xi \in [a,b]$ tal prova é trivializável e até mesmo a dedução da fórmula de Taylor com resto de Lagrange a partir daquela com resto integral é "simples": basta observar que $\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!}dt = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$ e a desigualdade $m\int_{x_0}^{x}(x-t)^n dt \leq \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \leq M\int_{x_0}^{x}(x-t)^n dt$, m o mínimo e M o máximo de $f^{(n+1)}$, e usar o TVI.

Corolário Aplicando o Segundo Teorema do Valor Médio para Integrais à forma integral do resto na fórmula de Taylor de uma função f, supondo $f^{(n+1)}$ contínua, obtemos, já que $[x_0, x] \ni t \mapsto (x-t)^n$ é positiva e com integral > 0 (o caso $x < x_0$ é análogo),

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \ ,$$

estabelecendo o que acima afirmamos ∎

Com a Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange obtemos uma versão da Proposição 2.

Proposição 3. Seja $f \in C^n(c,d)$, $n \geq 2$, e $a \in (c,d)$ tal que

$$f'(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(n)}(a) \neq 0 \ .$$

(a) Se n é par e J é o maior sub-intervalo de (c,d) com $a \in J$ e $f^{(n)}$ sem se anular em J,

  (i) Se $f^{(n)}(a) > 0$ então a é ponto de mínimo local estrito de f restrita a J.

  (ii) Se $f^{(n)}(a) < 0$ então a é ponto de máximo local estrito de f restrita a J.

(b) Se n é ímpar então a não é ponto nem de mínimo local nem de máximo local, de f.

Prova:

Dado $x \in (c,d)$, pelo Teorema 3 existe $\xi = \xi(x)$ entre a e x tal que

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)^1 + ... + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n \ = \ f(a) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n \ .$$

Para J como no ítem (a) e $x \in J \setminus \{a\}$ temos $\xi \in J$, $f^{(n)}(a)$ e $f^{(n)}(\xi)$ tem mesmo sinal e

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n \ ;$$

consequentemente, por tal equação,

(a) temos $(x-a)^n > 0$, pois n é par, e

  (i) $f^{(n)}(a) > 0 \Longrightarrow \ f^{(n)}(\xi) > 0$ e $f(x) > f(a)$

  (ii) $f^{(n)}(a) < 0 \Longrightarrow \ f^{(n)}(\xi) < 0$ e $f(x) < f(a)$.

(b) para $x \in J$, o sinal da expressão $\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n}$ é constante mas o do denominador $(x-a)^n$ não (n é ímpar) e assim o do numerador $f(x) - f(a)$ também não ∎

Fórmula de Taylor com Resto de Cauchy.

Esta fórmula é um aperfeiçoamento da Fórnula de Taylor com Resto de Lagrange e é utilizada em vários textos (mas não neste), particularmente para a análise da Fórmula Binomial, vide Exemplo 9 no que segue, e assim a apresentamos aqui e convidamos o leitor a aplicá-la no citado exemplo e em outros de sua escolha.

Teorema 4. Seja $f:(c,d)\to\mathbb{R}$ tal que existem $f^{(i)}$, $1\le i\le n+1$, n um natural fixo. Então, dados $x_0, x\in(c,d)$, x_0 fixo, existe $\xi=\xi(x)$ entre x_0 e x, com $\xi\neq x_0$ e $\xi\neq x$, tal que

$$f(x)=f(x_0)+\ f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\ +\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)\ .$$

Prova:

Consideremos para t entre x_0 e x a função Ψ [vide a definição de $\psi=\psi(t)$ no Teorema 3]

$$\Psi(t)=f(x)-f(t)-f'(t)(x-t)-\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2\ldots-\frac{f^n(t)}{n!}(x-t)^n\ .$$

Pela argumentado no Teorema 3 [vide o cômputo de ψ' no Teorema 3] a derivada de Ψ é,

$$\Psi'(t)\ =\ -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\ ,$$

e pelo TVM aplicado a Ψ existe ξ entre x e x_0, $\xi\neq x$ e $\xi\neq x_0$, tal que

$$\frac{\Psi(x)-\Psi(x_0)}{x-x_0}\ =\ \Psi'(\xi)\ =\ -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\ .$$

Mas, evidentemente,

$$\Psi(x)=0\ \text{ e }\ \Psi(x_0)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-\ldots-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\,,$$

e finalmente,

$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-\ldots-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)\quad\blacksquare$$

Comentário:

Admitindo $f^{(n+1)}$ contínua, a Fórmula de Taylor com Resto de Cauchy é consequência imediata da Fórmula de Taylor com Resto Integral pois sob tal hipótese o Teorema do Valor Médio para Integrais assegura a existência de ξ entre x_0 e x, $\xi\neq x_0$ e $\xi\neq x$, tal que

$$\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt\ =\ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\ .$$

Aplicações

Exemplo 5. As fórmulas de Taylor, resto de Lagrange, de e^x, $\cos x$ e $\sin x$ em $x_0 = 0$ são,

$$(a)\quad e^x \quad = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} \ , \ \xi \text{ entre } 0 \text{ e } x\,,\ \xi \neq 0 \text{ e } \xi \neq x\,.$$

Em particular,

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left[1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}\right].$$

$$(b)\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \frac{\cos^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}x^{2n+1} \ , \ \xi \text{ entre } 0 \text{ e } x\,,\ \xi \neq 0 \text{ e } \xi \neq x\,.$$

$$(c)\quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}x^{2n+2} \ , \ \xi \text{ entre } 0 \text{ e } x\,,\ \xi \neq 0 \text{ e } \xi \neq x\,.$$

Verificação: Segue imediatamente do Exemplo 1 e do Teorema 3 ■

Exemplo 6. Dadas as funções e^x, $\cos x$ e $\sin x$ e um número real arbitrário x temos,

(a) $e^x = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}\right]$.

(b) $\cos x = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\right]$.

(c) $\sin x = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right]$.

Verificação:

Se $P_n(x)$, $P_{2n}(x)$ e $P_{2n+1}(x)$ são os polinômios de Taylor de ordem n, $2n$ e $2n+1$, em $x = 0$, de e^x, $\cos x$ e $\sin x$ e, se $R_n(x)$, $R_{2n}(x)$ e $R_{2n+1}(x)$ são seus respectivos restos de Lagrange, vide Exemplo 5, mostremos que tais restos tendem a zero se n tende a $+\infty$.

Observemos antes que: fixado $m \in \mathbb{N}$, para $n > m$ temos

$$\frac{m^n}{n!} = \frac{m^m}{m!}\,\frac{m}{m+1}\,\frac{m}{m+2}....\frac{m}{n} \leq \frac{m^m}{m!}\,\frac{m}{n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0\,.$$

(a) Neste caso, com a notação do Exemplo 5, para $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $|x| < m < n$ temos,

$$|R_n(x)| = \left|\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leq e^m\,\frac{m^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to+\infty} 0\,.$$

(b) Neste caso, com a notação do Exemplo 5, para $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $|x| < m < n$ temos,

$$|R_{2n}(x)| = \left|\frac{\cos^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right| \leq \frac{m^{2n+1}}{(2n+1)!} \xrightarrow{n\to+\infty} 0\,.$$

(c) Neste caso, com a notação do Exemplo 5, para $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $|x| < m < n$ temos,

$$|R_{2n+1}(x)| = \left|\frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}x^{2n+2}\right| \leq \frac{m^{2n+2}}{(2n+2)!} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \quad ■$$

Exemplo 7. Para $-1 \le x \le 1$ é válida a expressão,

$$\arctan x = \lim_{n\to+\infty}\Big[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ...(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big] .$$

Em particular,

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to+\infty}\Big[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...\Big] .$$

Verificação:

Pelo Exemplo 2, basta provarmos $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt = 0$ se $|x| \le 1$. Para tal x é claro que

$$\Big|\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt\Big| \le \Big|\int_0^x t^{2n+2}\,dt\Big| = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \le \frac{1}{2n+3} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \quad \blacksquare$$

Exemplo 8. Para $-1 < x \le 1$ é válida a expressão,

$$\log(1+x) = \lim_{n\to+\infty}\Big[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\Big].$$

Em particular,

$$\log 2 = \lim_{n\to+\infty}\Big[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ..\Big] .$$

Verificação:

Pelo Exemplo 3, basta mostrarmos que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt = 0$ se $x \in (-1,1]$.

Se $x \in [0,1]$ é fácil ver que

$$0 \le \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \le \int_0^x t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \le \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 .$$

Se $-1 < x < 0$, para $-1 < x \le t \le 0$ temos $0 < 1+x \le 1+t \le 1$, $0 \le \frac{1}{1+t} \le \frac{1}{1+x}$ e assim,

$$\Big|\int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt\Big| = \Big|\int_x^0 \frac{t^n}{1+t}dt\Big| \le \frac{1}{1+x}\frac{|x|^{n+1}}{n+1} \le \frac{1}{(1+x)(n+1)} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \,\blacksquare$$

A seguir analisamos a função binomial $(1+x)^\alpha$, α não natural e $x > -1$, para a qual a fórmula de Taylor com resto integral é mais apropriada que a com resto de Lagrange.

Exemplo 9. Seja $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ com $\binom{\alpha}{m} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-m+1)}{m!}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, e $\binom{\alpha}{0} = 1$.

$$(a) \qquad (1+x)^\alpha = \lim_{n\to+\infty}\left[\binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + ... + \binom{\alpha}{n}x^n\right], \quad \forall x \in (-1,1)\ .$$

$$(b) \qquad 2^\alpha = \lim_{n\to+\infty}\left[\binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} + \binom{\alpha}{2} + ... + \binom{\alpha}{n}\right], \text{ se } \alpha > 0\ .$$

Verificação:

Seja $f(x) = (1+x)^\alpha$, com $x > -1$.

(a) Pelo Exemplo 4 basta mostrarmos: $R_n(x) = \int_0^x \frac{f^{n+1}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, se $|x| < 1$. Computando $f^{(n+1)}$ e reescrevendo o resto obtemos,

$$\frac{f^{n+1}(t)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{n!}(1+t)^{\alpha-n-1} = \alpha\binom{\alpha-1}{n}(1+t)^{\alpha-n-1},$$

$$(9.1) \qquad R_n(x) = \alpha\binom{\alpha-1}{n}\int_0^x (1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\,dt\ .$$

Analisemos então o resto, iniciando com os coeficientes binomiais.

Afirmação[8]**:** $\binom{\alpha-1}{n}x^n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, se $|x| < 1$ e $\alpha \notin \mathbb{N}$. Primeiro notemos que, é fácil ver,

$$A(n) := \left|\binom{\alpha-1}{n}\right| = \left|\left(1-\frac{\alpha}{1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)....\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\right|$$

e fixemos r tal que $|x| < r < 1$. Então, $\lim_{n\to+\infty}\left|\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)x\right| = |x|$ e existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|1-\frac{\alpha}{j}\right||x| < r < 1\,,\ \forall j > p\,,\ j \in \mathbb{N}\ .$$

Supondo $n > p$ concluímos a afirmação:

$$\left|\binom{\alpha-1}{n}x^n\right| = A(p)|x|^p\left|\left(1-\frac{\alpha}{p+1}\right)....\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\right||x|^{n-p} \le A(p)\,|x|^p\,r^{n-p} \xrightarrow{n\to+\infty} 0\ .$$

A seguir, analisamos o resto $R_n(x)$ dividindo nos casos x positivo e x negativo.

Caso $0 < x < 1$**:** temos $0 \le t \le x < 1$ e, para $n > \alpha - 1$: $0 \le (1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)^n \le x^n$ e

$$|R_n(x)| \le \left|\alpha\binom{\alpha-1}{n}\right|\int_0^x x^n\,dt = \left|\alpha\binom{\alpha-1}{n}\right|x^{n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} 0\ .$$

Caso $x < 0$**:** reescrevemos o integrando como $\left|\frac{(x-t)^n}{(1+t)^n}(1+t)^{\alpha-1}\right|$. Sendo $-1 < x \le t \le 0$, temos $0 < 1+x \le 1+t \le 1$ e $0 \le \frac{t}{x} \le 1$ e $(1+t)^{\alpha-1} \le B = B(x) = \max\left(1,(1+x)^{\alpha-1}\right)$ e

$$\frac{|x-t|}{|1+t|} \le |x| \qquad [\text{pois } 0 \le t-x \le -tx-x = -x(1+t) = |x||1+t|]\,.$$

Logo, $\left|\frac{(x-t)^n}{(1+t)^n}(1+t)^{\alpha-1}\right| \le B(x)|x|^n$ e, como acima, $|R_n(x)| \le B\left|\alpha\binom{\alpha-1}{n}x^{n+1}\right| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.

(b) **Caso** $x = 1$ **e** $\alpha > 0$**:** estimemos (9.1) mais precisamente. A sequência $A(n)$ é limitada pois se p é o primeiro natural tal que $0 < \alpha < p+1$, e portanto $0 < 1 - \frac{\alpha}{p+1} < 1$, temos

$$A(n) \le \left|\left(1-\frac{\alpha}{1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)...\left(\left(1-\frac{\alpha}{p}\right)\right| = C(\alpha) \text{ e}$$

$$|R_n(1)| \le \alpha C(\alpha)\int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{\alpha C(\alpha)}{n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \quad \blacksquare$$

[8]Este resultado é facilmente obtido com a teoria de Séries.

Tal expressão é útil para desenvolvermos outras funções e exemplificamos a seguir.

Exemplo 10. Para $|x| < 1$ são válidas as expressões,

$$(a) \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \lim_{n\to+\infty}\left[1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + ... + (-1)^n\frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....2n}x^n\right].$$

$$(b) \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{n\to+\infty}\left[1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + ... + \frac{1.3.5.....(2n-1)}{2.4.6....2n}x^{2n}\right].$$

Verificação:

São ambos consequências do Exemplo 9.

$$(a) \qquad (1+x)^{-\frac{1}{2}} = \lim_{n\to+\infty}\left[\binom{-\frac{1}{2}}{0} + \binom{-\frac{1}{2}}{1}x + \binom{-\frac{1}{2}}{2}x^2 + ... + \binom{-\frac{1}{2}}{n}x^n\right],$$

com $\binom{-\frac{1}{2}}{0} = 1$ e, para $n \geq 1$, $\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})...(-\frac{2n-1}{2})}{n} = (-1)^n\frac{1.3.5....(2n-1)}{2n}$.

(b) Segue imediatamente de (a), trocando x por $-x^2$ ■

Exemplo 11. Para $|x| < 1$ é válida a expressão,

$$\arcsin x = \lim_{n\to+\infty}\left[x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + ... + \frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6...2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right],$$

com a expressão entre colchetes sendo o polinômio P_{2n+1} de Taylor de $\arcsin x$ na origem.

Verificação:

Pelos Exemplos 9 [vide (9.1)] e 10(b) e sua notações obtemos para $|y| < 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = 1 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1.3}{2.4}y^4 + ... + \frac{1.3.5.....(2n-1)}{2.4.6....2n}y^{2n} + R_n(y^2)\ , \quad |R_n(y^2)| \leq \left|\frac{1}{2}\binom{-\frac{3}{2}}{n}\right|y^{2n+2}\,,$$

e integrando (podemos pois o resto integral é uma função contínua pelo TFC),

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + ... + \frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6...2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \int_0^x R_n(y^2)\,dy\,.$$

Então, pela Afirmação vista no Exemplo 9 temos

$$\left|\int_0^x R_n(y^2)\,dy\right| \leq \frac{1}{2}\left|\binom{-\frac{3}{2}}{n}\right|\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \xrightarrow{n\to+\infty} 0\,,\ \text{se } |x| < 1\,,$$

estabelecendo a 1 afirmação no enunciado. Quanto à 2 afirmação, basta notar que

$$\left|\frac{\arcsin x - P_{2n+1}(x)}{x^{2n+1}}\right| = \left|\frac{1}{x^{2n+1}}\int_0^x R_n(y^2)\,dy\right| \leq \frac{1}{2}\left|\binom{-\frac{3}{2}}{n}\right|\frac{x^2}{2n+3} \xrightarrow{x\to 0} 0 \quad ■$$

Exemplo 12. **(Teorema)** O número **e** é irracional.

Prova:

Se $s_n \;=\; 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\,....\,+\frac{1}{n!}$, $n\in\mathbb{N}$, então $s_n<e$, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = e$ e para $p\geq 1$,

$$\begin{aligned} s_{n+p}-s_n \;&= \tfrac{1}{(n+1)!}\;+\;\tfrac{1}{(n+2)!}\;+\cdots\tfrac{1}{(n+p)!} \\ &< \tfrac{1}{(n+1)!}\Big[1\;+\;\tfrac{1}{n+1}\;+\;\tfrac{1}{(n+1)^2}\;+\cdots\tfrac{1}{(n+1)^{p-1}}\Big] \\ &= \tfrac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{p-1}\Big(\tfrac{1}{n+1}\Big)^k \leq \tfrac{1}{(n+1)!}\tfrac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \tfrac{1}{n\,n!}\;. \end{aligned}$$

Portanto, $0<e-s_n=\lim\limits_{p\to+\infty}(s_{n+p}-s_n)\leq\frac{1}{nn!}$.

Desta forma, supondo e racional, escrevendo $e=\frac{p}{q}$, $p,q\in\mathbb{N}$ e $mdc(p,q)=1$, temos $0<q!(e-s_q)<\frac{1}{q}$, com os números $q!\,e$ e $q!s_q=q!\,(1+1+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{q!})$ inteiros. Logo, $q!\,(e-s_q)$ é um inteiro entre 0 e 1 ↯

Comentários:

(1) No Exemplo 6(a) vimos que se $x\in[0,1]$ então,

$$\left|e^x-\left[1\,+\,x\,+\,\frac{x^2}{2!}\,+\,....\,+\,\frac{x^n}{n!}\right]\right|\;\leq\;\frac{e}{(n+1)!}x^{n+1}\;\leq\frac{3}{(n+1)!}\;,$$

que não é uma estimativa para e tão precisa quanto a obtida no Exemplo 12, visto que $\frac{1}{nn!}<\frac{3}{(n+1)!}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Mas, a ordem de grandeza é a mesma já que $\frac{1}{10}\frac{3}{(n+1)!}\leq\frac{1}{nn!}\leq\frac{3}{(n+1)!}$.

Ainda mais, verificando que $0<e-s_7<10^{-4}$ e que

$$s_7=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\frac{1}{5040}=2+\frac{3620}{5040}=2+\frac{181}{252}=2,7182...$$

obtemos as primeiras três casas decimais de $e=2,718....$

(2) Vimos que e^x, $cosx$, $\log(1+x)$, $\arctan x$, $(1+x)^\alpha$, etc. tem expansões em intervalos abertos centrados em $x=0$ e fazendo uso de translações tais como

$$e^x=e^{x_0}e^{x-x_0}\;,\;\;\sin x=\sin[(x-x_0)+x_0]=\sin(x-x_0)\cos x_0\;+\;\cos(x-x_0)\sin x_0)\;,\;\text{ etc.}$$

não é difícil ver que admitem expansões ao redor de outros pontos x_0 em seus domínios. Funções com tais propriedades são ditas **analíticas** e são muito importantes e tem sob certos aspectos comportamento semelhante a polinômios. Mas, nem todas as funções infinitamente deriváveis são analíticas como bem mostra o exemplo que a seguir.

Exemplo 13. A função $f(x)\;=\;\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}\;,\;\text{ se } x\neq 0\,, \\ 0\,,\;\text{ se } x=0\,, \end{cases}$ é tal que $f^{(n)}(0)=0\,,\forall n\in\mathbb{N}$.

Verificação: Deixamos ao leitor completar a simples a prova abaixo (v. Figura 3).

As n-derivadas de f satisfazem $f^{(n)}(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}P(\frac{1}{x})$, $\forall x\neq 0$, P um polinômio. Logo,

$$\lim_{x\to 0^\pm} f^{(n)}(x)=\lim_{y\to\pm\infty}e^{-y^2}P(y)=\lim_{y\to\pm\infty}\frac{P(y)}{e^{y^2}}=0\quad,\quad\forall n\in\mathbb{N}=\{0,1,2,...\}\quad\blacksquare$$

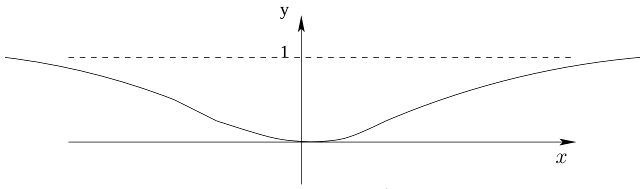

Figura 3: Gráfico de $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$, se $x \neq 0,\ f(0) = 0$.

Entre as mais elementares aplicações da Fórmula de Taylor destacamos o cômputo das primeiras casas decimais de um número.

Exemplo 14. Computemos um valor aproximado para $\sqrt[3]{8,2}$ utilizando um polinômio de Taylor de ordem 2 e avaliemos o erro.

Verificação: O polinômio de Taylor de ordem 2 de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ em torno de $x = 8$ é

$$P(x) = f(8) + f'(8)(x-8) + \frac{f''(8)}{2!}(x-8)^2 \ .$$

Logo, como $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ e $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$ segue que

$$P(x) = 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{144}(x-8)^2 \ ,$$

e portanto,

$$P(8,2) = 2 + \frac{2 \cdot 10^{-1}}{12} - \frac{4 \cdot 10^{-2}}{144} = 2 + \frac{1}{60} - \frac{1}{3600} = 2 + \frac{59}{3600} \approx 2,0163888 \ .$$

Avaliação do erro: Pela Fórmula de Taylor com resto de Lagrange temos,

$$f(8,2) - P(8,2) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(0,2)^3 \quad ,\text{com } \xi \text{ entre } 8 \text{ e } 8,2 \ .$$

Porém $f'''(x) = \frac{10}{27}\frac{1}{\sqrt[3]{x^8}}$ e para ξ entre 8 e $8,2$ temos $\xi^8 \geq 8^8 = (2^3)^8 = 2^{24}$ e $\sqrt[3]{\xi^8} \geq 2^8$ e

$$0 < \frac{f'''(\xi)}{3!} \leq \frac{1}{3!}\ \frac{10}{27}\frac{1}{2^8}2^3 \cdot 10^{-3} = \frac{10^{-2}}{64 \cdot 81} \leq 10^{-2} \cdot 10^{-3} = 10^{-5} \ .$$

Assim, $\sqrt[3]{8,2} \approx 2,0163888$ com erro inferior a 10^{-5} é uma **aproximação por falta** para $\sqrt[3]{8,2}$ [isto é, $2,0163888 \leq \sqrt[3]{8,2}$] com precisão até a 4 casa decimal ■

EXERCÍCIOS

1. Determine as primeiras 5 casas decimais de π.

2. Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 de f em volta de x_0.

   (a) $f(x) = \ln(1 + x)$ e $x_0 = 0$

   (b) $f(x) = e^x$ e $x_0 = 0$

   (c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $x_0 = 1$

   (d) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ e $x_0 = 0$

   (e) $f(x) = \sqrt{x}$ e $x_0 = 4$

3. Determine o polinômio de Taylor de ordem 3 de f em volta de $x_0 = 0$.

   (a) $f(x) = \tan x$

   (b) $f(x) = e^{\sin x}$

4. Determine o polinômio de Taylor de ordem 4 de $f(x) = x^5 + x^3 + x$ em $x_0 = 1$.

5. Escreva cada um dos seguintes polinômios em x como polinômios em $(x - 3)$.

   (a) $x^4 - 12x^3 + 44x^2 + 2x + 1$

   (b) x^5

6. Utilizando o polinômio de Taylor de ordem 2, calcule um valor aproximado e avalie o erro

   (a) $\ln 1,3$

   (b) $e^{0,03}$

   (c) $\sqrt{3,9}$

   (d) $\cos 0,2$.

7. Mostre que, para todo x,

   (a) $|\sin x - x| \le \frac{1}{3!}|x|^3$.

   (b) $|\cos x - (1 - \frac{x^2}{2!})| \le \frac{1}{3!}|x|^3$.

8. Mostre que, para $0 \le x \le 1$

$$0 \le e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2})| < \frac{x^3}{2}| \ .$$

9. Utilizando a relação $\sin x = x + o(x^2)$, calcule

$$(a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x^2}{x^2} \ .$$

10 . Verifique que

(a) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

(b) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

(c) $\sin x = x + o(x^2)$

(d) $\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + o\Big((x-1)^2\Big)$

7. Seja $f(x) = \begin{cases} x^8 \sin \frac{1}{x^2}, & \text{se } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

   (a) Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 de f em volta de $x - 0 = 0$.

   (b) Seja $a > 0$ um número real dado. Mostre que não existe $M > 0$ tal que para todo $x \in [0, a]$, $|f'''(x)| \leq M$.

8. Seja f derivável até a 2 ordem no intervalo I e seja $x_0 \in I$. Mostre que existe uma função $\varphi(x)$ definida em I tal que, para todo $x \in I$,

$$f(x) = f(x_0 + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \varphi(x)(x - x_0)^2\,, \text{ com } \lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0\ .$$

9. Generalize o Exercício 8 para uma função f derivável até ordem n.

10. Seja f derivável até a 2 ordem no intervalo fechado $[a, b]$ e seja $x_0 \in [a, b]$. Mostre que existe $M > 0$ tal que para todo $x \in [a, b]$,

$$|f(x) - P(x)| \leq M|x - x_0|^2\ \ ,$$

    com $P(x)$ o polinômio de Taylor de ordem 2: $P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$.

    Sugestão: mostre que a função $\varphi(x)$ do Exercício 8, com $\varphi(x_0) = 0$, é contínua em $x_0 = 0$.

11. Generalize o Exercício 10 para uma função f derivável até ordem n.

12. Determine o polinômio de Taylor de ordem 5 em volta de x_0 dado.

    (a) $f(x) = \cos x$ e $x_0 = 0$

    (b) $f(x) = \ln x$ e $x_0 = 1$

    (c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $x_0 = 1$

    (d) $f(x) = (1 + x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x_0 = 0$.

13. Seja $f(x) = \sin x$.

    (a) Se n é um natural ímpar e $x \in \mathbb{R}$ então,

$$\left|\sin x - \Big(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots.. + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n!}\right| \leq \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}\ .$$

    (b) Avalie $\sin 1$ com erro, em módulo, inferior a 10^{-5}.

    (c) Avalie, com erro em módulo inferior a 10^{-3},

$$\int_0^1 \sin x^2\, dx\ .$$

BIBLIOGRAFIA

1. Apostol, Tom M. *Analísis Matemático*, Editorial Rverté, 1960.

2. Boulos, Paulo. *Exercícios Resolvidos e Propostos de Sequências e Séries de Números e de Funções*, E. Edgard Blücher, 1986.

3. Bressoud, D. *A Radical Approach to Real Analysis*, The Mathematical Association of America, 2007.

4. Gouvêa, Fernando Q. *Séries Infinitas*, Apostila, Escola Politécnica da USP e Instituto de Matemática da USP, 1983.

5. Guidorizzi, H. L. *Um Curso de Cálculo*, vol 1, 5 ed., LTC Editora, 2001.

6. Hairer, E. and Wanner, G. *Analysis by Its History*, Undergraduate Text in Mathematics, Springer 2000.

7. Jahnke, H. N. (editor), *A History of Analysis*, History of Mathematics, Vol 24, AMS, 2003.

8. Lima, Elon L. *Curso de Análise*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1976.

9. Shilov, G. E. *Elementary Real and Complex Analysis*, Dover Publications, INC, 1996.

10. Spivak, M. *Calculus*, Editorial Reverté, 1978.