MAT2127 - Cálculo II - Química
Curso: Bacharelado Química
Prova de Recuperação - 11/02/2010
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	

Nome : ____

N$^{\underline{o}}$USP : ____

JUSTIFIQUE TODAS AS PASSAGENS

BOA SORTE!

1. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (a) f é contínua em (0,0)?

   (b) Compute as derivadas parciais de f em $(x,y) \neq (0,0)$.

   (c) Compute as derivadas parciais de f em (0,0).

   (d) f é diferenciável em (0,0)?

   (e) Analise a continuidade e a diferenciabilidade de f em pontos $(x,y) \neq (0,0)$.

2. Sejam $f(x,y,z)$ e $g(x,y)$ funções diferenciáveis com

$$\begin{cases} f(x,y,g(x,y)) = 0\,, \forall (x,y) \in Dom(g) \\ \\ g(1,1) = 3\,,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1,3) = 2\,,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1,3) = 5 \text{ e } \dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,3) = 10\ . \end{cases}$$

Determine a equação do plano tangente ao gráfico de g no ponto (1,1,3).

3. Determine o ponto (P) da (reta) interseção das superfícies (planos).

$$S_1 : x + y + z = 1 \quad \text{e} \quad S_2 : 3x + 2y + z = 6$$

mais próximo da origem e a distância deste ponto à origem.
Sugestão: Minimize $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ restrita a S_1 e a S_2.

4. Considere as retas

$$r : (x, y, z) = (0, 0, 2) + \lambda(1, 2, 0),\ \ \lambda \in \mathbb{R}\,;$$
$$s : (x, y, z) = (0, 0, 4) + \mu(1, 1, 1),\ \ \mu \in \mathbb{R}\,.$$

Determine, utilizando um hessiano em duas variáveis, $P \in r$ e $Q \in s$ tais que a distância de P a Q, $|\overline{PQ}|$, seja a menor possível; isto é, $|\overline{PQ}|$ é a distância entre as retas r e s. Compute $|\overline{PQ}|$ é a distância entre as retas r e s. Compute $|\overline{PQ}|$.

Sugestão: se $P = P(\lambda) \in r$ e $Q = Q(\mu) \in S$, minimize

$$\varphi(\lambda, \mu) = |P(\lambda) - Q(\mu)|^2\,;\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ .$$

5. Determine a solução (real) geral de $x''' - 4x'' + 6x' - 4x = t\ e^t \cos t$.

Resolução:

Considerando o polinômio característico associado

$p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 6\lambda - 4 = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = (\lambda - 2)(\lambda - 1 - i)(\lambda - 1 + i)$,

vemos que a solução geral (real) da edo homogênea associada à equação dada é

$$x_h(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^t \cos t + c_3 e^t \sin t\,, c_1\,, c_2\,, c_3 \ \in \mathbb{R}.$$

A seguir, escrevendo

$$x''' - 4x'' + 6x' - 4x = t\ e^t\ \cos t = \mathrm{Re}\Big[te^{(1+i)t}\Big]$$

e considerando a edo complexa para

$$z''' - 4z'' + 6z' - 4z = te^{(1+i)t}\,,\ z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\,,$$

sabemos que esta admite uma solução particular complexa z_p da forma

$$z_p(t) = Q(t)e^{\gamma t}\,, \gamma = 1 + i\,,$$

com $Q = Q(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ um polinômio satisfazendo

$$\begin{cases} Q''' + \frac{Q''}{2!}p''(1+i) + Q'p'(1+i) + Qp(1+i) = t\,, \\ \\ p(1+i) = 0 \\ p'(1+i) = (1+i-2)(1+i-1+i) = 2i(i-1) = -2(1+i)\,, \\ p''(1+i) = 6(1+i) - 8 = -2 + 6i\,, \end{cases}$$

donde obtemos

$$(*) \quad Q''' + (-1+3i)Q'' - 2(1+i)Q' = t \qquad \Big[\Longrightarrow \quad \mathrm{grau}(Q') = 1\Big]$$

e assim: $Q' = At + B$, A e B ctes. em $\mathbb{C}$, $Q'' = A$, $Q''' = 0$ e por (*)

$$\begin{cases} (-1+3i)A - 2(1+i)(At+B) = t & \Longrightarrow A = \frac{1}{-2(1+i)} = \frac{1-i}{-4} = \frac{-1+i}{4} \\ \\ B = \frac{(-1+3i)A}{2(1+i)} & \Longrightarrow B = \frac{(-1+3i)(-1+i)}{8(1+i)} = \frac{-1-2i}{4(1+i)} = \frac{-3-i}{8} \end{cases}$$

e assim, $Q'(t) = \frac{-1+i}{4}t + \frac{-3-i}{8}$ e escolhendo $Q(t) = \frac{-1+i}{8}t^2 + \frac{-3-i}{8}t$ temos a sol.

$$z_p(t) = \Big(\frac{-1+i}{8}t^2 + \frac{-3-i}{8}t\Big)e^t(\cos t + i \sin t)\,,$$

cuja parte real $x_p = \mathrm{Re}[z_p(t)]$ é solução particular real da equação inicial,

$$x_p(t) = \Big(-\frac{t^2}{8} - \frac{3}{8}t\Big)e^t \cos t + \Big(-\frac{t^2}{8} + \frac{t}{8}\Big)e^t \sin t\ .$$

Assim, a solução geral real da edo apresentada é, supondo $c_1\,, c_2\,, c_3 \ \in \mathbb{R}$,

$$x_g(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^t \cos t + c_3 e^t \sin t\ -\ \Big(\frac{t^2+3t}{8}\Big)e^t \cos t - \Big(\frac{t^2-t}{8}\Big)e^t \sin t \ \ \blacksquare$$

6. Dê as séries de Taylor em volta da origem (séries de McLaurin) e seus raios de convergência para as funções:

   (a) Série geométrica de razão x;

   (b) e^x

   (c) $\cos x$

   (d) $\text{sen} x$

   (e) $\ln(1+x)$