3ª Prova de MAT2127 - Cálculo II - Química
2º Semestre - 11/12/2009
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Boa Sorte!

Nome : ______________________________

NºUSP : ______________________________

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
Total	

JUSTIFIQUE TODAS AS PASSAGENS

1. Seja $w = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
   a) Calcule o diferencial de f em $(3,4)$.
   b) Calcule um valor aproximado para w correspondente a $x = 3,01$ e $y = 3,98$.
   c) Estime o erro cometido.

Resolução: Notemos que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(a) O diferencial no ponto $(3,4)$ é

$$dw = \frac{\partial f}{\partial x}(3,4)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(3,4)dy = \frac{3}{5}dx + \frac{4}{5}dy \ .$$

(b) A aproximação linear de $\Delta w = f(3,01;3,98) - f(3,4) = \Delta f$ é dada pelo diferencial dw computado em $(h,k) = (0,01\,;-0,02)$:

$$\Delta w \approx dw(h,k) = \frac{3}{5}0,01 - \frac{4}{5}0,02 = -0,01 \quad \text{e}$$

$$\sqrt{(3,01)^2 + (3,98)^2} - f(3,4) \approx -0,01\,,$$

$$f(3,01;3,98) \approx f(3,4) - 0,01 = 5 - 0,01 = 4,99\ .$$

(c) Necessitamos das derivadas de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\ .$$

Ao aproximarmos pelo polinômio de Taylor de ordem 1 o resto é

$$R(h,k) = \frac{1}{2}\Big[\ \frac{\bar{y}^2}{(\bar{x}^2+\bar{y}^2)^{\frac{3}{2}}}h^2 - \frac{2\bar{x}\bar{y}}{(\bar{x}^2+\bar{y}^2)^{\frac{3}{2}}}hk + \frac{\bar{x}^2}{(\bar{x}^2+\bar{y}^2)^{\frac{3}{2}}}k^2\ \Big]$$

estimando grosseiramente temos $(\bar{x}^2+\bar{y}^2)^{\frac{3}{2}} \geq 1$; $\bar{y}^2\,, \bar{x}\bar{y}$ e $\bar{x}^2 \leq 10^2$ e ainda $h^2 \leq 10^{-4}$, $hk \leq 2\times 10^{-4}$ e $k^2 \leq 4\times 10^{-4}$. Assim, $|R(h,k)| \leq \frac{9}{2}10^{-2} \leq 10^{-1}$.

2. Determine os pontos mais afastados da origem e com coordenadas sujeitas às restrições

$$x^2 + 4y^2 + z^2 = 4 \quad \text{e} \quad x + y + z = 1 \ .$$

Resolução:

Vide Exemplo 6, pp 330-331, 'Um Curso de Cálculo', vol 2, H.L. Guidorizzi.

Determinemos o ponto de mínimo da função $D(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeita às restrições dadas.

Como $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ pertencem ao interior do elipsóide e ao plano, a intersecção é compacta não vazia e $D = x^2 + y^2 + z^2$ têm aí máximo e mínimo.

Os pontos críticos de $D(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeito às restrições satisfazem,

$$\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 8y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} (P_o) \ = \ 0.$$

Logo,

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x & 4y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x(4y - z) - y(x - z) + z(x - 4y) \ = 3xy - 3yz = \ 0.$$

Logo, $3y(x - z) = 0$ e portanto, $y = 0$ ou $z = x$.

De $y = 0$ temos $x^2 + z^2 = 4$ e $x + z = 1$. Logo, $x^2 + (1 - x)^2 = 4$ ou, $2x^2 - 2x - 3 = 0$ e assim, $x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$ e $z = 1 - (\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}) = \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{7}}{2})$. Temos,

$$P_1 = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}) \quad , \quad P_2 = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}) \ .$$

De $z = x$ temos $x^2 + 2y^2 = 2$, e $y = 1 - 2x$. Portanto, $x^2 + 2(1 - 2x)^2 = 2$ e assim, $9x^2 - 8x = x(9x - 8) = 0$. Logo, $x = 0$ ou $x = \frac{8}{9}$. Temos então os pontos,

$$P_3 = (0,1,0) \quad , \quad P_4 = (\frac{8}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{8}{9}) \ .$$

Calculando, temos $D(0,1,0) = 1$, $D(\frac{8}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{8}{9}) = \frac{171}{81}$ e $D(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{7}}{2}) = 4$.

Logo, P_1 e P_2 tem máxima distância à origem e $(0,1,0)$ de mínima ■

3. Estude com relação a máximos e mínimos locais e/ou globais e pontos de sela a função:

$$f(x,y,z) = \sqrt[3]{x^3 + 2xy + y^2 + z^2 - 5x - 4z}\ .$$

Resolução:

É suficiente analisarmos a função $g(x,y,z) = x^3 + 2xy + y^2 + z^2 - 5x - 4z$.

Pontos críticos: de $\vec{\nabla} g(P) = \langle 3x^2 + 2y - 5\,, 2x + 2y\,, 2z - 4\rangle = 0$ temos, $z = 2$, $y = -x$ e $3x^2 - 2x - 5 = 3(x+1)(x - \frac{5}{3}) = 0$. Logo,

$$P_1 = (-1, 1, 2) \quad , \quad P_2 = (\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 2)\ .$$

Hessiano: Temos, $g_{xx} = 6x\,, g_{xy} = 2\,, g_{xz} = 0\,, g_{yz} = 0\,, g_{yy} = 2\,, g_{zz} = 2$ e então,

$$H(g) = \begin{vmatrix} 6x & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(12x - 4) \qquad H_1(f) = \begin{vmatrix} 6x & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (12x - 4)\ .$$

Logo, $H_1 g(P_1) = -16 < 0$ e assim, P_1 é ponto de sela ou, ainda, a diagonal de $\mathcal{H}g(P_1)$, a matriz hessiana de g em P_1, troca de sinal e então, o ponto é de sela.

Por último, $Hg(P_2) = 32 > 0$, $H_1 g(P_2) = 16 > 0$ e $g_{xx}(P_2) = 10 > 0$ e portanto, o ponto P_2 é de mínimo local $\blacksquare$

4. Resolva a edo.

$$x'' + 2x' + 2x = e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}\,\beta\, t \ ; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ .$$

Resolução:

Exercício resolvido número 12 nas notas sobre edo's entregue em sala e disponível na página eletrônica dedicada ao curso, na página 26.

5. Resolva a edo:

$$(*) \qquad x''' - 5x'' + 3x' + 9x = t^3 e^{3t} \ .$$

Resolução:

Vide também exercício resolvido número 11 nas notas sobre edo's entregue em sala e disponível na página eletrônica dedicada ao curso, na página 26.

O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1)$.
A solução geral da edo homogênea associada é

$$x_h = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} + c_3 e^{-t}, \qquad c_1\,, c_2\,, c_3 \in \mathbb{R}\ .$$

Sabemos que existe sol. part. $x_p = Q(t)e^{3t}$, Q um polinômio, de (*), tal que

$$(**) \qquad \frac{p'''(3)}{3!}Q''' + \frac{p''(3)}{2!}Q'' + \frac{p'(3)}{1!}Q' + \frac{p(3)}{0!}Q = t^3$$

Como $p' = 3\lambda^2 - 10\lambda + 3$, $p'' = 6\lambda - 10$ e $p''' = 6$ (**) reduz-se a

$$Q''' + 4Q'' = t^3 \ ,$$

com solução polinomial $Q'' = \frac{t^3}{4} + at^2 + bt + c$; donde, $Q''' = \frac{3}{4}t^2 + 2at + b$ e

$$t^3 = 4Q'' + Q''' = t^3 \ + \ \Big(4a + \frac{3}{4}\Big)t^2 \ + \ \Big(4b + 2a\Big)t \ + \ (\,4c + b\,)\,.$$

Logo,

$$a \ = \ -\frac{3}{16}\,, \quad b \ = \ \frac{3}{32} \quad \text{e} \quad c \ = \ -\frac{3}{128}\ ,$$

$$Q'' \ = \ \frac{t^3}{4} \ - \ \frac{3}{16}t^2 \ + \ \frac{3}{32}t \ - \ \frac{3}{128}$$

e escolhemos as primitivas com termo independente nulo:

$$Q' \ = \ \frac{t^4}{16} \ - \ \frac{t^3}{16} \ + \ \frac{3t^2}{64} \ - \ \frac{3}{128}t\,,$$

$$Q \ = \ \frac{t^5}{80} \ - \ \frac{t^4}{64} \ + \ \frac{t^3}{64} \ - \ \frac{3t^2}{256}\ .$$

A solução geral é,

$$x_g = \ c_1 e^{3t} \ + \ c_2 t e^{3t} \ + \ c_3 e^{-t} \ + \ \Big(\frac{t^5}{80} - \frac{t^4}{64} + \frac{t^3}{64} - \frac{3t^2}{256}\Big)e^{3t}\,, \quad c_i's \in \mathbb{R} \qquad \blacksquare$$

6. Dê as séries de Taylor em volta da origem (séries de Mc Laurin) e seus raios de convergência para as funções:

   a) Série geométrica de razão x;

   b) e^x;

   c) $\cos x$;

   d) $\text{sen}\, x$;

   e) $\ln(1+x)$.

Respostas:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n, \;\; r = 1$

(b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \;\; r = +\infty$

(c) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \;\; r = +\infty$

(d) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \;\; r = +\infty$

(a) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \;\; r = 1.$

7. Resolva a edo:

$$(*) \qquad x'' - 2x' + 2x = t^2 e^t \cos t \ = \ \mathrm{Re}\Big(t^2 e^{(1+i)t} \Big).$$

Resolução:

O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2 + 1$, com raízes $\lambda = 1 \pm i$. Assim, a solução geral da equação homogênea associada é

$$x_h(t) \ = \ c_1 e^t \mathrm{cos} t + c_2 e^t \sin t\,, \quad c_1\,, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Se $z_p(t)$ é solução particular complexa de

$$z'' - 2z' + 2z \ = \ t^2 e^{(1+i)t} = t^2 e^t (\, \mathrm{cos} t + i \sin t\,)\,,$$

$x_p(t) = \mathrm{Re}(\, z_p(t)\,)$ é solução particular real de (*).
Sabemos (provamos) que existe uma tal $z_p(t)$ na forma

$$(1) \qquad z_p(t) = Q(t) e^{(1+i)t}\,,$$

$$(2) \qquad Q'' + p'(1+i)Q' + p(1+i)Q = t^2\,,$$

$Q(t)$ um polinômio na variável t.
Como $p(1+i) = 0$, $p'(\lambda) = 2\lambda - 2 = 2(\lambda - 1)$ e $p'(1+i) = 2i$, (2) torna-se:

$$Q'' + 2iQ' = t^2 \ ,$$

logo Q' é um polinômio de grau dois cujo coeficiente do monômio t^2 é $\frac{1}{2i}$:

$$Q' = \frac{t^2}{2i} + at + b \Rightarrow Q'' = \frac{t}{i} + a = -it + a$$

e

$$t^2 = 2iQ' + Q'' = t^2 + (2ai - i)t + (2bi + a)\ .$$

Logo, $a = \frac{1}{2}$ e $b = -\frac{1}{4i} = \frac{i}{4}$; donde,

$$Q' = \frac{t^2}{2i} + \frac{t}{2} + \frac{i}{4} \ = \ -\frac{t^2 i}{2} + \frac{t}{2} + \frac{i}{4}$$

e então escolhemos

$$Q(t) = -\frac{t^3 i}{6} + \frac{t^2}{4} + \frac{ti}{4}\ .$$

Substituindo $Q(t)$ na equação (1) obtemos,

$$z_p(t) = \Big[\ -\frac{t^3}{6}i \ + \ \frac{t^2}{4} \ + \ \frac{t}{4}i \Big] e^t \Big(\mathrm{cos} t + i \sin t \Big)$$

e

$$x_p(t) \ = \ \mathrm{Re}(\, z_p(t)\,) = e^t \Big[\ \frac{t^2 \mathrm{cos} t}{4} \ + \ \frac{t^3 \sin t}{6} \ - \ \frac{t \sin t}{4} \ \Big]$$

Resposta final:

$$x_g(t) = c_1 e^t \mathrm{cos} t + c_2 \sin t \ + \ e^t \Big[\ \frac{t^2 \mathrm{cos} t}{4} \ + \ \frac{t^3 \sin t}{6} \ - \ \frac{t \sin t}{4} \ \Big], \quad c_1\,, c_2 \in \mathbb{R} \ \blacksquare$$