$2^{\underline{a}}$ Prova de MAT2127 - Cálculo II - Química
$2^{\underline{o}}$ Semestre - 09/11/2009
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
Total	

Nome : ____________________*GABARITO*____________________

$N^{\underline{o}}$USP : ____

JUSTIFIQUE TODAS AS PASSAGENS

1. Um ponto P descreve uma trajetória sobre o gráfico de $f(x, y) = 4x^2 + y^2$. Sabe-se que a reta tangente em cada ponto da trajetória forma com o plano xy ângulo máximo. Determine uma parametrização para a trajetória, admitindo que ela passe pelo ponto (1, 1, 5).

Repetindo a teoria:

Se $\vec{v}$ é um versor, $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_o, y_o)$ é o coeficiente angular, em relação ao plano xy, da reta tangente, no ponto $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$ pertencente ao gráfico de f, à curva formada pela intersecção do plano perpendicular (vertical) ao plano xy com o gráfico de f.

O máximo de

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_o, y_o) = \vec{\nabla} f(x_o, y_o) \cdot \vec{v} = |\vec{\nabla} f(x_o, y_o)|\ |\vec{v}| \cos\theta\,,$$

onde θ é o ângulo entre o gradiente e $\vec{v}$, é $|\vec{\nabla} f(x_o, y_o)|$ e ocorre se $\vec{v}$ tem mesma direção e sentido que o gradiente e portanto, como $\vec{v}$ é unitário, se $\vec{v} = \frac{\vec{\nabla} f}{|\vec{\nabla} f|}$.

Se $t \mapsto \Gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ descreve a trajetória de uma curva no gráfico de f temos $z(t) = f(x(t), y(t))$.

Logo, para que a reta tangente em cada ponto da trajetória forme com o plano xy ângulo máximo é necessário que a projeção da trajetória sobre o plano xy, dada pela curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, tenha para cada t no domínio de γ a direção do vetor gradiente. Isto é, $\gamma'(t)$ com mesma direção e sentido que $\vec{\nabla} f(\gamma(t))$.

Resolução:

Como $\vec{\nabla} f = \langle 8x, 2y \rangle$ impomos $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ paralelo a $\vec{\nabla} f(x(t), y(t)) = \langle 8x(t), 2y(t) \rangle$ o que se traduz pela equação (esta condição é bem geométrica),

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2y(t)}{8x(t)} \quad \Rightarrow \quad 4\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{x'(t)}{x(t)}\,,$$

e assim obtemos por integração

$$4\int \frac{y'(t)}{y(t)}\,dt = \int \frac{x'(t)}{x(t)}\,dt\,,$$

e,

$$4\log|y(t)| = \log|x(t)| + C_1\,, \text{ para algum } C_1 \in \mathbb{R}\,.$$

Donde, $\log y^4(t) = \log C_2|x(t)|$ para algum $C_2 > 0$ e $y^4(t) = C_2|x(t)|$ e, ainda, $y^4(t) = C_3 x(t)$ para algum $C_3 \in \mathbb{R}$.

Com a projeção da trajetória passando por $(1,1)$, impomos $C_3 = 1$.

Podemos então escolher, entre infinitas parametrizações,

$$\Gamma(t) = (e^{4t}, e^t, 4e^{8t} + e^{2t})\,, t \in \mathbb{R}\,, \qquad \text{ou} \quad \Gamma(t) = (t^4, t, 4t^8 + t^2)\,, t \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

2. Determine $f : I\!R^2 \to I\!R$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\ e^{x^2+y^2},\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y\ e^{x^2+y^2} + \frac{1}{1+y^2} \quad \text{e} \quad f(0,1) = \frac{\pi}{4}.$$

Resolução:

Temos,

$$f(x,y) = \int \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = \int 2x\ e^{x^2+y^2} dx = e^{x^2+y^2} + \varphi(y)\,,$$

e então, derivando em relação a y,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2} + \varphi'(y)\ .$$

Logo, devido às hipóteses,

$$2ye^{x^2+y^2} + \varphi'(y) = e^{x^2+y^2} + \frac{1}{1+y^2}\,,$$

e portanto, $\varphi'(y) = \frac{1}{1+y^2}$ e $\varphi(y) = \int \frac{1}{1+y^2}\, dy = \arctan y + C\,, C \in \mathbb{R}$.
Desta forma obtemos,

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2} + \arctan y + C\,,$$

e então, impondo a condição $f(0,1) = \frac{\pi}{4}$, $C = -e$ ■

3. Seja $f(x,y) = e^{x+5y}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Compute $P_1(x,y)$, o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de $(0,0)$.

(b) Mostre que para todo (x,y) com $x + 5y < 1$,

$$| \, e^{x+5y} - P_1 \ (x,y) \, | \leq \frac{3}{2} \ (x+5y)^2.$$

(c) Avalie o erro que se comete na aproximação

$$e^{x+5y} \cong P_1 \ (x,y)$$

para $x = 0,01$ e $y = 0,01$.

Resolução:

(a) Temos: $f_x = e^{x+5y}$, $f_y = 5e^{x+5y}$, $f(0,0) = 1$, $f_x(0,0) = 1$, $f_y(0,0) = 5$ e

$$P_1(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)(x-0) + f_y(0,0)(y-0) = 1 + x + 5y \ .$$

(b) Pela fórmula de Taylor de ordem 1 com resto de Lagrange temos,

$$\begin{aligned} f(x,y) \ &= f(0,0) + f_x(0,0)x \ + f_y(0,0)y \ + \\ &+ \tfrac{1}{2}[f_{xx}(\overline{x},\overline{y})x^2 + 2f_{xy}(\overline{x},\overline{y})xy + f_{yy}(\overline{x},\overline{y})y^2] \\ &= 1 + \ x + \ 5y + \ \tfrac{1}{2}[e^{\overline{x}+5\overline{y}}x^2 + 10e^{\overline{x}+5\overline{y}}xy + 25e^{\overline{x}+5\overline{y}}y^2] \\ &= 1 + \ x + \ 5y + \ \tfrac{1}{2}e^{\overline{x}+5\overline{y}}(x+5y)^2 \, , \end{aligned}$$

para algum $(\overline{x},\overline{y})$ no segmento que une $(0,0)$ a (x,y); como $0 + 0 < 1$ e $x + 5y < 1$ segue que também $\overline{x} + 5\overline{y} < 1$ (a constatação geométrica é trivial). Desta forma temos,

$$|e^{x+5y} - (1 + x + 5y)| = \frac{1}{2}e^{\overline{x}+5\overline{y}}(x+5y)^2 \leq \ \frac{e^1}{2}(x+5y)^2 \leq \frac{3}{2}(x+5y)^2 \ .$$

(c) Pela estimativa em (b) temos

$$\begin{aligned} |e^{0,06} - 1,06| \ &= |e^{0,01+0,05} - P_1(0,01;0,01)| \\ &\leq \ \tfrac{3}{2}(0,01+0,05)^2 = \tfrac{3}{2} \cdot 36 \cdot 10^{-4} = 54 \cdot 10^{-4} < 10^{-2} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Para completarmos escrevemos:

$$\begin{cases} \Delta z \ &= f(0,01\,;\,0,01) - f(0,0) = e^{0,06} - 1\,, \\ dz \ &= \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)10^{-2} + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)10^{-2} = 10^{-2} + 510^{-2} = 0,06 \ . \end{cases}$$

Assim temos,

$$\begin{cases} \Delta z = e^{0,06} - 1 \approx dz\,, \\ dz = 0,06\,, \\ e^{0,06} = 1,06 + E\,, \ \text{com } |E| < 10^{-2} = 0,01 \qquad \blacksquare \end{cases}$$

4. Estude com relação a máximos e mínimos locais, e pontos de sela, a função

$$f(x,y,z) = \frac{x^5}{5} + y^4 + z^4 - \frac{x^3}{3} - 2y^2.$$

Resolução

Pontos críticos: $\vec{\nabla} f(x,y,z) = \langle x^4 - x^2\,, 4y^3 - 4y\,, 4z^3 \rangle = \vec{0}$. Logo,

$$x^2(x^2-1) = 0\,, 4y(y^2-1) = 0\,, z = 0\ .$$

Isto é,
$P_1 = (0,0,0)$, $P_2 = (0,-1,0)$, $P_3 = (0,1,0)$,
$P_4 = (1,0,0)$, $P_5 = (1,-1,0)$, $P_6 = (1,1,0)$,
$P_7 = (-1,0,0)$, $P_8 = (-1,-1,0)$, $P_9 = (-1,1,0)$.

Temos, $f_{xx} = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2-1)$, $f_{yy} = 12y^2 - 4 = 4(3y^2-1)$, $f_{zz} = 12z^2$ e derivadas mistas nulas. Analisemos as matrizes em P_i $(z=0)$, $1 \le i \le 9$,

$$\mathcal{H}(f)(P_i) = \begin{bmatrix} 2x(2x^2-1) & 0 & 0 \\ 0 & 4(3y^2-1) & 0 \\ 0 & 0 & f_{zz}=0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H}_1(f)(P_i) = \begin{bmatrix} 2x(2x^2-1) & 0 \\ 0 & 4(3y^2-1) \end{bmatrix}\ .$$

Não podemos aplicar o teorema pois o hessiano é zero.

Pontos críticos em que a diagonal de $\mathcal{H}f$ troca de sinal são de sela: No ponto P_4 temos $f_{xx} = 2$ e $f_{yy} = -4$; em P_8 e P_9 temos, $f_{xx} = -2$ e $f_{yy} = 8$.

$P_i = (0, y_i, 0)$, $i = 1,2,3$, são de sela: $x = 0$ não é máximo ou minímo local da restrição $\varphi_i(x) = f(x, y_i, 0) = x^3(\frac{x^2}{5} - \frac{1}{3}) + (y_i^4 - 2y_i^2)$ pois $(\frac{x^2}{5} - \frac{1}{3}) < 0$ se $x \approx 0$ e x^3 é positivo à direita de zero e negativo à esquerda.

$P_7 = (-1,0,0)$ é ponto de sela pois $\varphi(z) = f(-1,0,z) = z^4 + \frac{2}{15}$ têm mínimo local estrito em $z = 0$ e $\psi(y) = f(-1,y,0) = \frac{2}{15} + y^4 - 2y^2$, $\psi'' = 12y^2 - 4$ têm máximo local estrito em $y = 0$.

$P_5 = (1,-1,0)$ e $P_6 = (1,1,0)$ são pontos de mínimo local pois as funções de uma variável, $\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}$, $y^4 - 2y^2$ e z^4 têm mínimo local em $x = 1$, $y = \pm 1$ e $z = 0$, respectivamente, e considerando-as funções de três variáveis, x, y, z, elas têm mínimo local em $(1, \pm 1, 0)$ e, a soma das três, que é f, têm mínimo local em $(1, \pm 1, 0)$ $\blacksquare$

5. Considere $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $(x,y,z) \in I\!R^3$ e as restrições

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad \text{e} \quad x + y - z = 0.$$

(a) Existem o máximo e o mínimo de f sujeita a tais restrições? Justifique.

(b) Determine, se existirem, os valores e os pontos de máximo e mínimo.

Resolução:

(a) A condição $g(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} - 1 = 0$ define um elipsóide e a condição $h(x,y,z) = x+y-z = 0$ um plano. O problema se traduz geometricamente em achar os pontos, na curva intersecção do parabolóide com o plano, mais próximo e mais distante da origem. Os quais evidentemente existem e, analiticamente, tem existência assegurada pelo Teorema de Weierstrass pois são o máximo e o mínimo absoluto da função $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ (quadrado da distância) sobre a citada curva, a qual é compacta. Note que se P_o é ponto de máximo/mínimo então $-P_o$ também o é.

(b) Pelo teorema dos multiplicadores de Lagrange, se P_o é um extremante local de f condicionado às restrições dadas temos,

$$\vec{\nabla} f(P_o) = \lambda \vec{\nabla} g(P_o) + \mu \vec{\nabla} h(P_o)\,, \quad \text{com } \lambda\,, \mu \in \mathbb{R}\ .$$

Logo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2x_o & 2y_o & 2z_o \\ \frac{2}{4}x_o & \frac{2}{9}y_o & \frac{2}{25}z_o \end{vmatrix} = \quad 2^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ x_o & y_o & z_o \\ \frac{1}{4}x_o & \frac{1}{9}y_o & \frac{1}{25}z_o \end{vmatrix} = 0\ .$$

Donde,

$$\Big(\frac{y_o z_o}{25} - \frac{y_o z_o}{9}\Big) - \Big(\frac{x_o z_o}{25} - \frac{x_o z_o}{4}\Big) - \Big(\frac{x_o y_o}{9} - \frac{x_o y_o}{4}\Big) = 0\,,$$

e

$$\begin{aligned} 0 &= -\tfrac{16}{9\cdot 25} y_o(x_o + y_o) + \tfrac{21}{4\cdot 25} x_o(x_o + y_o) + \tfrac{5}{4\cdot 9} x_o y_o \\ &= \tfrac{21}{4\cdot 25} x_o^2 - \tfrac{16}{9\cdot 25} y_o^2 + \Big(- \tfrac{16}{9\cdot 25} + \tfrac{21}{4\cdot 25} + \tfrac{5}{4\cdot 9}\Big) x_o y_o\ . \end{aligned}$$

Porém, $-\frac{16}{9\cdot 25} + \frac{21}{4\cdot 25} + \frac{5}{4\cdot 9} = \frac{-64+189+125}{4\cdot 9\cdot 25} = \frac{250}{4\cdot 9\cdot 25}$ e obtemos da equação acima,

$$\frac{21}{4} x_o^2 - \frac{16}{9} y_o^2 + \frac{250}{36} x_o y_o = 0 \Longrightarrow (*) \quad 189x_o^2 - 64y_o^2 + 250x_0 y_o = 0.$$

Utilizando a segunda condição e elevando a identidade $z_o = x_o + y_o$ ao quadrado obtemos $2x_o y_0 = z_o^2 - x_o^2 - y_o^2$. Substituindo esta em $(*)$ obtemos

$$0 = 189x_o^2 - 64y_o^2 + 125(z_o^2 - x_o^2 - y_o^2) = 64x_o^2 - 189y_0^2 + 125z_0^2.$$

Resolvamos o sistema linear abaixo, nas variáveis x_o^2, y_o^2 e z_o^2,

$$\begin{cases} \frac{x_o^2}{4} + \frac{y_o^2}{9} + \frac{z_o^2}{25} & = 1 \\ 64x_o^2 - 189y_o^2 + 125z_o^2 & = 0. \end{cases}$$

Escrevendo

$$\begin{cases} 225x_o^2 + 100y_o^2 & = 900 - 36z_o^2 \\ 64x_o^2 - 189y_o^2 & = -125z_o^2 \end{cases}$$

e aplicando a regra de Cramer temos,

$$x_o^2 = \frac{\begin{vmatrix} 900 - 36z_o^2 & 100 \\ -125z_o^2 & -189 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 225 & 100 \\ 64 & -189 \end{vmatrix}} \quad \text{e} \quad y_o^2 = \frac{\begin{vmatrix} 225 & 900 - 36z_o^2 \\ 64 & -125z_o^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 225 & 100 \\ 64 & -189 \end{vmatrix}}$$

Assim, determinamos x_o e y_o em função de z_o^2.

Substituindo tais valores de x_o e y_o na equação $(*)$ [ou talvez na equação $z_o = x_o + y_o$] obtemos uma equação do segundo grau em z_o. Então, é finalmente fácil determinar possivelmente dois valores para z_o. Em seguida, determinamos x_o e y_o.

Por fim, avaliamos a função quadrado da distância $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ nos pontos encontrados e distinguimos os pontos de máximo/ mínimo$\blacksquare$

6. Dada $f(x,y) = 6x^2 + 18xy + 4y^2 - 6x - 10y + 5$, determine os extremantes de f e os valores máximo e mínimo locais e absolutos de f no quadrado

$$K = [-1,+1] \times [-1,+1] = \{(x,y) \in I\!R^2 : |x| \leq 1 \quad \text{e} \quad |y| \leq 1\}.$$

Resolução: (vide notas do curso)

Os pontos críticos de f são dados pela equação

$$\vec{\nabla} f \;\; = \langle 12x + 18y - 6, 18x + 8y - 10 \rangle = \langle 0, 0 \rangle \quad \Rightarrow \quad 2x + 3y - 1 = 0 \quad \text{e} \quad 9x + 4y - 5 = 0$$

O único ponto crítico no interior de K é $P_o = \left(\frac{11}{19}, -\frac{1}{19}\right)$. A hessiana de f é,

$$\mathcal{H}_f = \begin{bmatrix} 12 & 18 \\ 18 & 8 \end{bmatrix}$$

e então, $f_{xx}(P_o) = 12 > 0$ e o determinante hessiano $H_f(P_o)$ é negativo. Logo, P_o é ponto de sela e f não tem máximo nem mínimo locais no interior de D.

Assim, o máximo e o mínimo absolutos pertencem à fronteira de K,

$$\partial K = \{-1\} \times [-1,1] \;\cup\; \{1\} \times [-1,1] \;\cup\; [-1,1] \times \{-1\} \;\cup\; [-1,1] \times \{1\} \;.$$

Os extremantes locais na fronteira de K, mas não um vértice, satisfazem (v. Teorema 2):

Em $\{-1\} \times]-1,1[$ temos $x = -1$ e $0 = f_y = -18 + 8y - 10$; logo, $y = 7/2$, que descartamos.

Em $\{1\} \times]-1,1[$ temos $x = 1$ e $0 = f_y = 18 + 8y - 10$; logo, $y = -1$ e $P_1 = (1,-1)$ que não pertence ao segmento considerado, é um vértice e será analizado à parte.

Em $]-1,1[\times \{-1\}$ temos $y = -1$ e $0 = f_x = 12x - 18 - 6$; logo, $x = 2$, que descartamos.

Em $]-1,1[\times \{1\}$ temos $y = 1$ e $0 = f_x = 12x + 18 - 6$; logo, $x = -1$ e $P_2 = (-1,1)$ que não pertence ao segmento considerado, é um vértice e será analizado à parte.

Portanto, os pontos de máximo e o mínimo se encontram entre o vértices. Temos, $f(1,1) = 17$, $f(-1,-1) = 49$, $f(1,-1) = +1$, e $f(-1,+1) = -7$.

Resposta: Não existem máximo ou mínimo locais e interiores; $f(-1,+1) = -7$ é o mínimo absoluto e $f(-1,-1) = 49$ é o máximo absoluto ■

7. Seja $f(x, y)$ diferenciável e homogênea de grau λ no aberto $\Omega \in I\!R^2$. Verifique

$$a\ \frac{\partial f}{\partial x}\ (at, bt) + b\ \frac{\partial f}{\partial y}\ (at, bt) = \lambda\ t^{\lambda-1}\ f(a, b),$$

quaisquer que sejam $t > 0$ e $(a, b) \in \Omega$ tais que $(at, bt) \in \Omega$.

Resolução (primeiro exercício da lista 6-B:)

Por hipótese temos,

$$f(ta\,, tb) = t^\lambda f(a, b)\,, \forall t > 0 \text{ e } (a, b) \in \Omega \text{ tais que } (ta\,, tb) \in \Omega\ .$$

Derivando os dois membros de tal identidade em relação a t obtemos

$$\frac{d}{dt}\left\{f(at\,, bt)\right\} = \frac{d}{dt}\left\{t^\lambda f(a, b)\right\}\ ,$$

donde, aplicando a regra da cadeia para a derivada do primeiro membro e derivando elementarmente o segundo membro,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(at, bt)\frac{d(at)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(at, bt)\frac{d(bt)}{dt} = \lambda t^{\lambda-1} f(a, b)\,.$$

Logo,

$$a\frac{\partial f}{\partial x}(at, bt) + b\frac{\partial f}{\partial y}(at, bt) = \lambda t^{\lambda-1} f(a, b) \quad \blacksquare$$