1ª Prova de MAT2127 - Cálculo II - Química
2º semestre de 2009
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	

Nome : ____________________GABARITO__________________

NºUSP : ____

JUSTIFIQUE TODAS AS PASSAGENS

1. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2} \ , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) f é contínua em $(0,0)$?

b) Calcule as derivadas parciais de f em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$, se existirem.

c) Determine o conjunto dos pontos em que f é diferenciável.

Resolução:

(a) Como $0 \leq \frac{x^4}{x^2+y^2} = x^2 \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq x^2$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0$, pelo Teorema do Confronto segue que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ e f é contínua.

(b) Se $(x,y) \neq (0,0)$ pelas regras usuais de derivação temos,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{4x^3(x^2+y^2) - 2x^5}{(x^2+y^2)^2} \ , \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2x^4y}{(x^2+y^2)^2} \ ;$$

se $(x,y) = (0,0)$, como $f(x,0) = x^2$, $\forall x$ (incluindo $x = 0$), segue que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = 0$$

e como $f(0,y) = 0$, $\forall y$ (incluindo $y = 0$), segue que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = 0 \ .$$

(c) Nos pontos $(x_0,y_0) \neq (0,0)$, f_x e f_y são funções (racionais) contínuas e então, por um teorema, a f é diferenciável. Em $(0,0)$ analisemos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} E(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^4}{h^2+k^2} - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^4}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} h \frac{h^2}{h^2+k^2} \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \ ,$$

como $|h \frac{h^2}{h^2+k^2} \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}| \leq |h|$ pelo teor. do confronto: $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} E(h,k) = 0$ e f é diferenciável.

2. Seja $W(s,t) = F(u(s,t),\ v(s,t))$, onde $F,\ u$ e v são diferenciáveis, e

$$\begin{cases} u(1,0) = 2,\ u_s(1,0) = -2,\ u_t(1,0) = 6 \\ \\ v(1,0) = 3,\ v_s(1,0) = 5,\ v_t = (1,0) = 4\ . \\ \\ F_u(2,3) = -1 \text{ e } F_v(2,3) = 10 \end{cases}$$

Determine $W_s(1,0)$ e $W_t(1,0)$.

Resolução: Pela regra da cadeia temos,

$$\begin{cases} W_s = F_u u_s + F_v v_s \\ W_t = F_u u_t + F_v v_t \end{cases},$$

donde, substituindo os valores fornecidos obtemos

$$\begin{cases} W_s(1,0) = F_u(2,3)u_s(1,0) + F_v(2,3)v_s(1,0) = -1(-2) + 10(5) = 52 \\ W_t(1,0) = F_u(2,3)u_t(1,0) + F_v(2,3)v_t(1,0) = -1(6) + 10(4) = 34 \quad \blacksquare \end{cases}$$

3. Determine $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ para

$$z = e^{xy}\text{tg y} \ , \quad \begin{cases} x = s + 2t \\ y = \dfrac{s}{t} \end{cases} .$$

Resolução:

ALERTAS: (1) Não é admissível "misturar" as variáveis x, y, s e t.

(2) É necessário apresentar a resposta nas variáveis s e t.

1ª solução: Inicialmente computemos,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy} y \tan y \ , \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{xy} x \tan y + e^{xy} \sec^2 y$$

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial s} = 1 \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{1}{t} \\ \frac{\partial x}{\partial t} = 2 \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{s}{t^2} \ . \end{cases}$$

Logo, pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial z}{\partial s} = e^{\frac{s(s+2t)}{t}} \frac{s}{t} \tan\left(\frac{s}{t}\right) \ + \ \left[e^{\frac{s(s+2t)}{t}} (s+2t) \tan\left(\frac{s}{t}\right) \ + \ e^{\frac{s(s+2t)}{t}} \sec^2\left(\frac{s}{t}\right)\right] \frac{1}{t} \, ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = e^{\frac{s(s+2t)}{t}} \frac{s}{t} \tan\left(\frac{s}{t}\right) 2 \ + \ \left[e^{\frac{s(s+2t)}{t}} (s+2t) \tan\left(\frac{s}{t}\right) \ + \ e^{\frac{s(s+2t)}{t}} \sec^2\left(\frac{s}{t}\right)\right] \left(-\frac{s}{t^2}\right) \ .$$

2ª solução(a mais simples):

Substituindo as expressões para x e y na fórmula para z obtemos,

$$z = e^{(\frac{s^2}{t} + 2s)} \tan\left(\frac{s}{t}\right) ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = e^{(\frac{s^2}{t} + 2s)} \left(\frac{2s}{t} + 2\right) \tan\left(\frac{s}{t}\right) \ + \ e^{(\frac{s^2}{t} + 2s)} \sec^2\left(\frac{s}{t}\right) \frac{1}{t} \, ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -e^{(\frac{s^2}{t} + 2s)} \frac{s^2}{t^2} \tan\left(\frac{s}{t}\right) - e^{(\frac{s^2}{t} + 2s)} \sec^2\left(\frac{s}{t}\right) \frac{s}{t^2}$$

3ª solução (a mais elegante):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{t} \\ 2 & -\frac{s}{t^2} \end{bmatrix} , \ \text{com}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} = e^{\frac{s(s+2t)}{t}} \begin{bmatrix} \frac{s}{t} \tan\left(\frac{s}{t}\right) & (s+2t) \tan\left(\frac{s}{t}\right) \ + \ \sec^2\left(\frac{s}{t}\right) \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

4. Determine a equação do plano tangente e da reta normal ao gráfico de $f(x,y)=\sqrt{8-3x^2-y^2}$ no ponto $(1,1,f(1,1))$.

Resolução:

Inicialmente computemos,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{-3x}{\sqrt{8-3x^2-y^2}}\ , \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{-y}{\sqrt{8-3x^2-y^2}}\ .$$

Então, o vetor normal ao plano π procurado é

$$\vec{n}=\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\,,\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\,,-1\right\rangle=\left\langle -\frac{3}{2}\,,-\frac{1}{2}\,,-1\right\langle\ \ ,$$

e como $f(1,1)=2$, as equações do plano π e da reta normal N são:

$$\pi:\quad -\frac{3}{2}(x-1)-\frac{1}{2}(y-1)-(z-2)=0$$

$$N:\quad (x\,,y\,,z)=(1\,,1\,,2)+\lambda\left\langle -\frac{3}{2}\,,-\frac{1}{2}\,,-1\right\rangle\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}\quad\blacksquare$$

5. Determine a equação do plano contendo os pontos $(3,-1,2)$, $(8,2,4)$ e $(-1,-2,-3)$.

1ª solução: A equação vetorial do plano tangente.

O plano por $(3\,,-1\,,2)$ e vetores diretores $\langle 5\,,3\,,2\rangle$ e $\langle -4\,,-1\,,-5\rangle$, tem equação:

$$\pi : (x\,,y\,,z) = (3\,,-1\,,2) + \lambda(5\,,3\,,2) + \mu(-4\,,-1\,,-5)\,, \quad \lambda\,,\mu \in \mathbb{R}\ .$$

2ª solução A equação ponto-vetor para o plano tangente.

Sabemos que $P = (x,y,z)$ pertence ao plano π procurado se e só se

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 8-3 & 2+1 & 4-2 \\ -1-3 & -2+1 & -3-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 5 & 3 & 2 \\ -4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0\ .$$

Isto é, se e só se,

$$-13(x-3) + 17(y+1) + 7(z-2) = 0$$

ou

$$-13x + 17y + 7z = -42 \qquad \blacksquare$$

6. Verifique se as retas abaixo são reversas ou não e compute a distância entre elas.

$$L_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}$$

$$L_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z+2}{3}$$

Resolução (esta solução é bem curta):

Os vetores $\vec{v}_{L1} = \langle 2\,,2\,,1\rangle$ e $\vec{v}_{L2} = \langle 1\,,-1\,,3\rangle$ são diretores das retas $L1$ e $L2$, respectivamente, e são não paralelos. Logo, $L1$ e $L2$ são concorrentes ou reversas.

Computemos a distância d entre elas: se $A = (1\,,3\,,2)$ e $B = (2\,,6\,,-2)$ temos,

$$d = \left| \vec{AB}.\frac{\vec{v}_{L_1} \times \vec{v}_{L2}}{|\vec{v}_{L_1} \times \vec{v}_{L2}|} \right|.$$

Como d, computado abaixo, é maior que zero concluímos que elas são reversas:

$$\vec{v}_{L_1} \times \vec{v}_{L2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \langle 7\,,-5\,,-4\rangle \ , \ |\vec{v}_{L_1} \times \vec{v}_{L2}| = \sqrt{90}\,,$$

$$d = \left| \frac{\langle 1\,,3\,,-4\rangle\,.\,\langle 7\,,-5\,,-4\rangle}{\sqrt{90}} \right| = \left| \frac{7-15+16}{\sqrt{90}} \right| = \frac{8}{\sqrt{90}} \quad \blacksquare$$