MAT 2127- CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Lista 9 de Exercícios

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Período: Segundo Semestre de 2009

1. A edo $x'' + bx' + cx = P(t)$, $b, c \in \mathbb{R}$, P um polinômio, tem solução particular polinomial Q:

   (a) Se $c \neq 0$ então grau(Q) =grau(P).

   (b) Se $c = 0$ e $b \neq 0$, podemos supor $Q = tP_1(t)$, grau(P_1) =grau(P).

   (c) Se $c = b = 0$, podemos supor $Q = t^2 P_1(t)$, grau(P_1) =grau(P).

2. Resolva a equação dada:

   (a) $x'' + 4x = \cos \beta t$, onde β é um real arbitrário.

   (b) $x'' + \alpha x = e^{2t}$, onde α é um real arbitrário.

   (c) $x'' + 9x = 2\cos 3t + 9$.

   (d) $x'' + 4x' + 5x = e^{\alpha t} \sin \beta t$, onde α e $beta$ são reais arbitrários.

3. Verifique: Sejam $A, B, b, c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$. Dada a edo real

$$(1) \quad x'' + bx' + cx = At^k e^{\alpha t} \cos \beta t + Bt^k e^{\alpha t} \sin \beta t \,,$$

   considere a edo complexa [se $\beta \neq 0$],

$$(2) \quad z'' + bz' + cz = t^k e^{(\alpha + i\beta)t} \,.$$

   (a) Se $z_p(t)$ é uma solução particular complexa de (2) então $\mathrm{Re}(z_p)(t)$ e $\mathrm{Im} z_p(t)$ são, respectivamente, soluções reais das edo's reais

$$x'' + bx' + cx = t^k e^{\alpha t} \cos \beta t \quad \text{e} \quad x'' + bx' + cx = t^k e^{\alpha t} \sin \beta t \,.$$

   (b) Uma solução particular real de (1) é então,

$$x_p(t) = A\,\mathrm{Re}(z_p)(t) + B\,\mathrm{Im}(z_p)(t) \,.$$

   (c) Uma solução particular complexa de (2), $z_p(t) = Q(t)e^{(\alpha+i\beta)t}$, $Q(t)$ um polinômio com coeficientes complexos, existe se, e somente se,

$$Q'' + p'(\gamma)Q' + p(\gamma)Q = t^k \,,$$

   onde $\gamma = \alpha + i\beta$ e $p(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c$ é o polinômio característico.

4. Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 da função dada em volta de (x_0, y_0) dado.

   (a) $f(x, y) = e^{x+5y}$ e$(x_0, y_0) = (0, 0)$.

   (b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ e $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

   (c) $f(x, y) = \sin(3x + 4y)$ e $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

5. Sejam $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ e P_1 o pol. de Taylor de ordem 1 de f em volta de $(1,1)$.

   (a) Mostre que para todo (x,y) com $|x-1| < 1$ e $|y-1| < 1$,
   $$|f(x,y) - P_1(x,y)| < 7(x-1)^2 + 6(y-1)^2 \ .$$

   (b) Calcule um valor aproximado para $f(x,y)$ sendo $x = 1,001$ e $y = 0,99$.

   (c) Avalie o erro cometido em (b)

6. Seja $w = f(x,y,z) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{y} + z^2$.

   (a) Calcule o diferencial de f em $(4,8,2)$.

   (b) Calcule um valor aproximado para w, correspondente a $x = 4,01$, $y = 7,98$ e $z = 2,03$.

   (c) Estime o erro cometido.

7. Determine se são convergentes ou divergentes as séries abaixo. Se convergente calcule sua soma.

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 5(\frac{2}{3})^{n-1}$

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-6)^{n-1}}{5^{n-1}}$

   (c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

   (d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n}$

   (e) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^n}{3^{n+1}}$

   (f) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{3^{n-1}}$

   (g) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+5}$

   (h) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{n}$

   (i) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2-1}$

   (j) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$

8. Teste a convergência ou divergência das séries dadas

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-1}{n^2+n}$

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n^2+n}$

   (c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n}$

   (d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{2^{3n}}$

(e) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n}$

(f) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{n-1}{n^2+n}$

(g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n}{1+8n} \right)^n$

9. Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência das séries

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{(n-1)} x^n}{n^3}$

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} x^n$

(e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

(f) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^n x^n$

(g) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n 4^n x^n$

(h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n 3^n}$

(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{n^n}$

(j) $\sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{(x-4)^n}{n^3+1}$

(k) $\sum_{n=1}^{+\infty} n!((2x-1)^n$

(l) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{b^n} (x-a)^n$

(m) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(x-4)^n}{n^3+1)}$

10. Encontre uma representação em séries de potências para a função dada e determine o intervalo de convergência

(a) $f(x) = \frac{1}{1+x}$

(b) $f(x) = \frac{1}{1-x^3}$

(c) $\frac{3}{1-x^4}$

(d) $f(x) = \frac{1}{1+9x^2}$

(e) $f(x) = \frac{1}{x-5}$

11. (a) Use diferenciação para encontrar uma representação em séries de potências para

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}\ ,$$

determine o raio de convergência desta séries de potências.

(b) Use o item (a) para encontrar uma séries de potências para

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}\ .$$

(c) Use o item (b) para achar uma série de potências para

$$f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^3}\ .$$

12. (a) Ache uma representação em série de potências para para $f(x) = \ln(1+x)$. Qual o raio de convergência?

(b) Use o item (a) para encontrar uma série de potências para $f(x) = x\ln(1+x)$

(c) Use o item (a) para achar uma série de potências para $f(x) = \ln(x^2+1)$.

13. Avalie a integral definida como uma série de potências e dê o raio de convergência.

(a) $\int \frac{t}{1-t^8}$

(b) $\int \frac{\ln(1-t)}{t} dt$

14. Use série de potências e aproxime a integral definida com precisão de seis casas decimais.

(a) $\int_0^{0,2} \frac{1}{1+x^5} dx$

(b) $\int_0^{0,4} \ln(1+x^4) dx$.

15. Mostre que $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ é solução da edo

$$f''(x) + f(x) = 0.$$

16. Compute as séries de McLaurin das funções [utilize séries de McLaurin já sabidas]

(a) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$

(b) $f(x) = \cosh(x)$

(c) $f(x) = \sinh(x)$

(d) $f(x) = \cos \pi x$

(e) $f(x) = e^{-x^2}$.