$7^{\underline{a}}$ Lista de MAT2127 - Cálculo II - IQ
$2^{\underline{o}}$ semestre de 2009
Professor Oswaldo Rio Branco

Atenção: Resolverei em sala os exercícios 6, 9, 10 e 11, que não serão corrigidos.

1. Ache a solução geral de:

   a) $\dfrac{dx}{dt} - 3x = e^t$ b) $\dfrac{dx}{dt} - x = 2t + 1$ c) $\dfrac{dx}{dt} - x = \cos t$

   d) $\dfrac{dx}{dt} + 2x = \operatorname{sen} t$ e) $\dfrac{dx}{dt} - 2x = e^{2t}$ f) $\dfrac{dx}{dt} = tx$

2. Numa certa cultura de bactérias, a taxa de aumento é proporcional ao número presente. Verificando-se que o número dobra em 2 horas, quantas pode-se esperar ao final de 6 horas? Determine a equação diferencial e resolva-a.

3. Uma partícula de massa $m = 1$ deslocá-se sobre o eixo x sob ação de uma única força, paralela ao deslocamento, com componente $f(x) = -x$.

   a) Qual a equação diferencial que rege o movimento?

   b) Determine duas soluções linearmente independente para a equação.

   Sugestão: Interprete fisicamente.

4. Resolva as equações:

   a) $\dfrac{dx}{dt} = tx^2$ b) $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - x$ c) $\dfrac{dx}{dt} = t(1 + x^2)$ d) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t}{x}$

5. a) Resolva a equação $\dfrac{dx}{dt} = x^2 t$.

   b) Esboce o gráfico das soluções.

   c) Determine as soluções com condição inicial dada:

   i) $x(1) = 0$ ii) $x(0) = 1$ iii) $x(0) = -1$

6. Suponha um cabo (ou corda) suspenso sobre a ação de seu próprio peso. Por exemplo, num longo fio de telefone pendurado entre dois postes ou, uma ponte suspensa feita de cordas ou uma corrente suspensa. Determine a equação que descreve a curva que forma o cabo (ou ponte ou corrente) suspensa. Suponha a densidade linear constante.

7. Dada a equação $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{3dx}{dt} + 2x = 0$.

   a) Resolva-a.

   b) Determine uma solução tal que $x(0) = 0$ e $x'(0) = 1$.

   c) Esboce o gráfico da solução.

8. Resolva as equações:

   a) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} - 3x = 0$ b) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 4x = 0$

   c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + 9y = 0$ d) $2\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} - x = 0$

9. Mostre que as funções $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ e $e^{\lambda_3 t}, \lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$, são linearmente independentes, sobre $I\!R$ ou $\mathbb{C}$).

10. Consideremos a equação diferencial ordinária linear com coeficientes constantes, $\left(\frac{d}{dt} - \alpha I\right)^4 x = 0$ com α real ou complexo. Mostre que as soluções são $x(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 t e^{\alpha t} + c_3 t^2 e^{\alpha t} + c_4 t^3 e^{\alpha t}$, $c_i's \in I\!R$ se $\alpha \in I\!R$ e $c_i's \in \mathbb{C}$ se $\alpha \in \mathbb{C}$.

11. Mostre que $e^{\alpha t}, te^{\alpha t}, ..., t^{n-1}\alpha t$, são soluções de $\left(\frac{d}{dt} - \alpha I\right)^n x = 0$, $\alpha \in R$ ou $\alpha \in \mathbb{C}$.

12. Resolva as equações de variáveis separáveis

    a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+y^2}{x}, x > 0$

    b) $\dfrac{dv}{dt} = 4 - v^2$

13. Resolva as equações lineares de 1ª ordem

    a) $\dfrac{dT}{dt} = -2(T-3)$

    b) $\dfrac{dy}{dx} = -2y + cosx$

14. Uma partícula de massa $m = 1$ desloca-se sobre o eixo $0x$ sob a ação da força elástica $-x\vec{i}$ e de uma força de amortecimento proporcional à velocidade dada por $-2\,\dot{x}\,\vec{i}$. Determine a posição $x = x(t), t \geq 0$, da partícula no instante t e discuta o movimento, supondo

    a) $x(0) = 1$ e $\dot{x}\,(0) = 0$

    b) $x(0) = 1$ e $\dot{x}\,(0) = -2$

15. Uma partícula de massa $m = 1$ desloca-se sobre o eixo $0x$ sob a ação de uma força elástica $-x\vec{i}$ e de uma força de amortecimento proporcional à velocidade dada por $-c\,\dot{x}\,\vec{i}(c > 0)$. Determine c para que o movimento seja:

    a) Fortemente amortecido.

    b) Criticamente amortecido.

    c) Oscilatório amortecido.