6ª B Lista de MAT2127 - Cálculo II - IQ
2º semestre de 2009
Professor Oswaldo Rio Branco

A RELAÇÃO DE EULER

Definição: Uma função $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$ é dita **homogênea de grau** λ se,

$$f(tx, ty) = t^\lambda f(x, y)\,, \forall t > 0 \text{ e } \forall (x, y) \in A\ .$$

1. Verifique se são homogêneas as funções abaixo e determine o grau de homogeneidade.

$(a)\ f(x,y) = \dfrac{x^3 + 2xy^2}{x^3 - y^3}$ $\qquad (b)\ f(x,y) = \sqrt{x^4 + y^4}$ $\qquad (c)\ f(x,y) = \dfrac{2}{x^2 + y^2}$.

2. Seja $f(x, y)$ diferenciável e homogênea de grau λ no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Verifique:

   (a) Quaisquer que sejam $t > 0$ e $(a, b) \in \Omega$ tais que $(at, bt) \in \Omega$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(at, bt) + b\frac{\partial f}{\partial y}(at, bt) = \lambda t^{\lambda-1} f(a, b)\ .$$

   (b) Conclua de (a) que

$$\textbf{(Relação de Euler)} \qquad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda f\ .$$

   Sugestão para (a): Derive em relação a t os dois membros de $f(at, bt) = t^\lambda f(a, b)$.

3. Seja $f(x, y)$ definida e diferenciável na bola aberta B. Suponha que f verifica em B a relação de Euler

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda f(x, y)\ .$$

   Verifique que f é homogênea de grau λ.
   Sugestão: Mostre que $g(t) = \frac{f(at,bt)}{t^\lambda}$ é constante.

4. Seja $\varphi = \varphi(u)$ diferenciável; $f(x, y) = x^2\varphi(\frac{x}{y})$ verifica $xf_x + yf_y = 2f$? Por quê?

5. $f(x, y) = \dfrac{e^{\frac{x}{y}} \arctan \frac{x}{y} + \sin(\mathrm{COS}\frac{x}{y})}{\sqrt[3]{x^3+y^3}}$ verifica a equação $xf_x + yf_y = -f$? Por quê?

6. Determine uma família de funções que verifique a equação $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

7. Seja $f(x, y)$ diferenciável no aberto Ω e homogênea de grau λ. Verifique que $\frac{\partial f}{\partial x}$ é homogênea de grau $\lambda - 1$. Isto é: $\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t^{\lambda-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ se $t > 0$ e $(tx, ty) \in \Omega$.
   Sugestão: Derive em relação a x os dois membros de $f(tx, ty) = t^\lambda f(x, y)$.

8. Seja $f(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$, diferenciável em $(0, 0)$ e $f(tx, ty) = tf(x, y)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ e $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que f é linear; i.e., $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ com $f(x, y) = ax + by$, $\forall (x, y)$.

9. Seja $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$, se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$.

   (a) Verifique que $f(tx, ty) = tf(x, y)$ para todo t e todo (x, y).

   (b) Releia o exercício 8 e responda: f é diferenciável em $(0, 0)$? Por quê?