$6^{\underline{a}}$ Lista de MAT2127 - Cálculo II - IQ
$2^{\underline{o}}$ semestre de 2009
Professor Oswaldo Rio Branco

Atenção: Resolverei em sala os exercícios 1, 7, 9, 15, 16 e 18. Resolverei também: 2(a), 6(a), 12(a), 14(a), 19(a) e 19(b). Todos estes não serão corrigidos pelo monitor.

1. Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^2$, $g = g(u,v) : \Omega \to \mathbb{R}$ diferenciável em todo ponto de Ω e $F = F(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciável em todo ponto de $\mathbb{R}^3$, e o gráfico de g contido numa superfície de nível de F. Então: $P_0 \in Gr(g)$ e $\vec{\nabla} f(P_o) \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{\nabla} f(P_o)$ é ortogonal ao plano tangente ao gráfico de g no ponto P_o.

2. Dê a equação do plano tangente e da reta normal às superfícies, no ponto dado.
   a) $2xyz = 3$ em $(\frac{1}{2}, 1, 3)$
   b) $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 8$ em $(1, -1, 1)$
   c) $ze^{x-y} + z^3 = 2$; $P = (2, 2, 1)$

3. A função diferenciável $z = f(x,y)$ é dada implicitamente por $x^3 + y^3 + z^3 = 10$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1, f(1,1))$.

4. Seja $z = f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$.
   a) Dê um exemplo de uma curva $\gamma = \gamma(t)$, com imagem contida na superfície de nível 1 de $f : x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$.
   b) Prove que $\vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0$, $\forall t_0$ no domínio de γ.
   c) Determine a equação do plano tangente à superfície dada, no ponto (x_0, y_0, z_0).
   d) Dê a equação do plano tangente à superfície de nível $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 14$, no ponto $(1, 1, 1)$.

5. Determine a equação do plano normal em $(1, 2, 3)$ à intersecção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ e $xyz = 6$.

6. Com argumentos geométricos, ache soluções da equação a derivadas parciais dada.
$$(a)\ \ 3\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad (b)\ \ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad (c)\ \ y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0\ .$$

7. Determine uma função $z = f(x,y)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$ e cujo gráfico passe pelos pontos $(1, 1, 3)$, $(0, 0, 1)$ e $(0, 1, 2)$.

8. Determine uma função $z = f(x,y)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = 2\frac{\partial f}{\partial y}$ e cujo gráfico contenha a imagem da curva $\gamma(t) = (t, t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.

9. Seja $f(x,y)$ diferenciável e sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores de $\mathbb{R}^2$ unitários e ortogonais. Então:
$$\vec{\nabla} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}\vec{u} \ + \ \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\vec{v}\ .$$

10. Calcule a derivada direcional da função dada no ponto e direção $\vec{w}$ indicados.
    (a) $f(x,y,z) = xyz$ em $(1, 1, 1)$ e na direção $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.
    (b) $f(x,y,z) = x^2 + xy + z^2$ em $(1, 2, -1)$ e na direção $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

11. Seja $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$. Mostre, e explique:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) \neq \vec{\nabla} f(0,0) \cdot \vec{u}\,, \quad \text{se } \vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) .$$

12. Determine todas as funções $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tais que:
(a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 9x^2y^2 - 10x \quad , \frac{\partial f}{\partial y} = 6x^3y + 1$.
(b) $\frac{\partial f}{\partial x} = y\text{cos}xy + 3x^2 - y \quad , \frac{\partial f}{\partial y} = x\text{cos}xy - x + 3y^2$.

13. Determine a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cujo gráfico passa pelo ponto $(0,0,2)$ e tal que:

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2+1}\,, \frac{y}{x^2+y^2+1} + ye^{y^2}\right) .$$

14. Um campo de forças $F(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$, P e Q funções definidas num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, é dito **conservativo** se existe um campo escalar $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{\nabla}\varphi(x,y) = \vec{F}(x,y) \ \text{ em } \Omega \ .$$

Uma tal função φ, quando existe, chama-se **função potencial** associada ao campo $\vec{F}$. Verifique se são conservativos os campos abaixo (justifique):

$$(a)\ \vec{F}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} \qquad (b)\ \vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j} \qquad (c)\ \vec{F}(x,y) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \ .$$

15. Seja $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ um campo de forças com P e Q contínuas no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \Omega\,, \forall t \in [a,b]$, uma curva de classe C^1, com $\gamma(a) = \gamma(b)$ [γ é então dita **curva fechada**]. Se $\vec{F}$ for conservativo então,

$$\int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = 0 \ .$$

16. Seja $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j} = \frac{-y}{x^2=y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}\,,\ (x,y) \neq (0,0)$.

    (a) Verifique
    $$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,, \quad \forall (x,y) \neq (0,0) \ .$$

    (b) Compute $\int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$, onde $\gamma(t) = (\text{cos}t\,, \sin t)\,, t \in [0, 2\pi]$.

    (c) $\vec{F}$ é conservativo ? Por que?

17. Seja $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ um campo de forças com P e Q contínuas no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Se $\vec{F}$ é conservativo, existe uma função escalar $U(x,y)$ definida em Ω tal que $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$ em Ω. Denominamos U **função energia potencial** associada ao campo $\vec{F}$. Determine, caso exista, a função energia potencialassociada ao campo $\vec{F}$ dado e satisfazendo a condição dada.

    (a) $\vec{F}(x,y) = -6x\vec{i} - 2y\vec{j}$ e $U(0,0) = 0$.

    (b) $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} - xy\vec{j}$ e $U(0,0) = 1000$.

18. Estude com relação a máximos e mínimos a função dada no conjunto dado.

a) $f(x,y) = 3x - y$

$K = \{(x,y) \ : \ x \geq 0\,, \ y \geq 0\,, \ y - x \leq 3\,, \ x + y \leq 4\}$

b) $f(x,y) = x + 5y$

$K = \{(x,y) \ : \ 5x + 6y \leq 30\,, \ 3x + 2y \leq 12\,, \ x \geq 0 \ \text{ e } \ y \geq 0\}$

19. Estude com relação a máximos e mínimos a função dada com as restrições dadas:

a) $f(x,y) = 3x + y \quad \text{e} \quad x^2 + 2y^2 \leq 1$

b) $f(x,y) = x^2 - 2y^2 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 - 2x = 0$

c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y \quad \text{e} \quad x + 2y = 3$

d) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 \quad \text{e} \quad x^2 + 2y^2 = 1$

e) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 \quad \text{e} \quad xy = 1$, $x > 0$ e $y > 0$.

20. Estude com relação a máximos e mínimos locais a função:

a) $f(x,y) = x^3y + 12x^2 - 8y$

b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y} + xy\,, \ x > 0 \ \text{ e } \ y > 0$

c) $F(x,y,z) = x^2 - y^2 + 4z^2 + 2xz - 4yz - 2x - 6z$

d) $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 5x + 2y - z + 8$

21. Determine o ponto do plano $3x+2y+z = 12$ cuja soma dos quadrados das distâncias a $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$ seja mínima.

22. Ache os pontos de máximo e de mínimo da função $F(x,y,z) = x + 2y + z$, com a restrição $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$.

23. Determine o ponto do elipsóide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$ que maximiza a soma $x + 2y + z$.

24. Maximize $f(x,y,z) = x+2y+3z$ sujeita às restrições $x^2+y^2+z^2 = 4$ e $x+y+z = 1$.