Equações Diferenciais Ordinárias Lineares com Coeficientes Constantes
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Segundo Semestre de 2009

I- INTRODUÇÃO

I.1 - Edo's lineares de 1 ordem

Neste texto a, b e c indicam números reais e I um intervalo aberto fixo não vazio em $\mathbb{R}$. Uma equação diferencial linear (real) de 1 ordem, com coeficientes reais, é da forma

$$\frac{dx}{dt} + ax = f(t) \quad , \quad f : I \to \mathbb{R} \, , \; f \text{ contínua em } I \ .$$

Multiplicando ambos os membros da equação acima pelo **fator integrante** e^{at} obtemos

$$e^{at}\frac{dx}{dt} + axe^{at} = e^{at}f(t)$$

que simplificando pela regra para a derivada do produto de duas funções nos dá,

$$\frac{d}{dt}\Big\{e^{at}x(t)\Big\} = e^{at}f(t)\,,$$

a qual integrando acarreta

$$e^{at}x(t) = \int e^{at}f(t)\,dt + C\,, \quad C \text{ uma constante real}\,,$$

ou,

$$x(t) = e^{-at}\int e^{at}f(t)\,dt + Ce^{-at} \quad , \quad C \in \mathbb{R}\,,$$

que é a fórmula para a solução geral da equação de primeira ordem apresentada.

I.2 - O Operador Derivação

Definições: Seja I um intervalo aberto e não vazio em $\mathbb{R}$.

(a) $C^\infty(I;\mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R} \text{ tal que } f \text{ é infinitamente derivável}\}$ é o espaço vetorial das funções de classe C^∞, definidas em I e a valores em $\mathbb{R}$, também indicado por $C^\infty(I)$.

(b) **O operador (linear) derivação de ordem um** $\frac{d}{dt}$**:** $C^\infty(I) \to C^\infty(I)$ é dado por,

$$\frac{d}{dt}(f) = \frac{df}{dt} = f' \quad .$$

(c) O **operador (linear) identidade** $I : C^\infty(I) \longrightarrow C^\infty(I)$ é dado por,

$$I(f) = f \ .$$

(d) **O operador (linear) homotetia de razão** λ, $\lambda I : C^\infty(I) \to C^\infty(I)$, é dado por

$$(\lambda I)(f) = \lambda f \ .$$

Lema 1. $C^\infty(I)$ é um espaço vetorial e os operadores acima são lineares.

Prova: É trivial e a deixamos ao leitor $\blacksquare$

Mantenhamos as notações acima.

Lema 2. São verdadeiras as propriedades abaixo.

(a) Vale a regra de composição

$$\Big(\frac{d}{dt}\circ\frac{d}{dt}\Big)(f) = \frac{d^2 f}{dt^2} = f'' , \quad \forall f \in C^\infty(I) \ .$$

(b) O operador identidade comuta com a homotetia de razão λ:

$$\frac{d}{dt}\circ(\lambda I) \ = \ (\lambda I)\circ\frac{d}{dt} \quad .$$

(c) Se λ_1, λ_2 são números reais,

$$\Big(\tfrac{d}{dt} - \lambda_1 I\Big)\circ\Big(\tfrac{d}{dt} - \lambda_2 I\Big) \ = \ \Big(\tfrac{d}{dt} - \lambda_2 I\Big)\circ\Big(\tfrac{d}{dt} - \lambda_1 I\Big) \ = \tfrac{d^2}{dt^2} - (\lambda_1 + \lambda_2)\tfrac{d}{dt} + \lambda_1\lambda_2 I.$$

Prova: Seja $f \in C^\infty(I)$.

(a) É fácil ver que $\Big(\frac{d}{dt}\circ\frac{d}{dt}\Big)(f) = \frac{d}{dt}\Big(\frac{d}{dt}(f)\Big) = \frac{d}{dt}(f') = f'' = \frac{d^2}{dt^2}(f)$.

(b) Consequência da regra $(\lambda f)' = \lambda f'$.

(c) Neste caso temos,

$$\begin{aligned}
\Big(\tfrac{d}{dt} - \lambda_1 I\Big)\circ\Big(\tfrac{d}{dt} - \lambda_2 I\Big)(f) \ &= \Big(\tfrac{d}{dt} - \lambda_1 I\Big)\Big(\Big(\tfrac{d}{dt} - \lambda_2 I\Big)(f)\Big) \ = \ \Big(\tfrac{d}{dt} - \lambda_1 I\Big)(f' - \lambda_2 f) \\
&= \Big(\tfrac{d}{dt} - \lambda_1 I\Big)(f') \ - \ \Big(\tfrac{d}{dt} - \lambda_1 I\Big)(\lambda_2 f) = \\
&= f'' - \lambda_1 f' - \lambda_2 f' + \lambda_1\lambda_2 f = f'' - (\lambda_1 + \lambda_2) f' + \lambda_1\lambda_2 f = \\
&= \Big(\tfrac{d^2}{dt^2} - (\lambda_1 + \lambda_2)\tfrac{d}{dt} + \lambda_1\lambda_2 I\Big)(f) \, ,
\end{aligned}$$

assim temos, $\Big(\frac{d}{dt} - \lambda_1 I\Big)\circ\Big(\frac{d}{dt} - \lambda_2 I\Big) = \frac{d^2}{dt^2} - (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{d}{dt} + \lambda_1\lambda_2 I$ e, analogamente, $\Big(\frac{d}{dt} - \lambda_2 I\Big)\circ\Big(\frac{d}{dt} - \lambda_1 I\Big) = \frac{d^2}{dt^2} - (\lambda_2 + \lambda_1)\frac{d}{dt} + \lambda_2\lambda_1 I$ $\blacksquare$

Definição: Se $P(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_1 t + a_0$ é um polinômio com coeficientes $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \le i \le n$, indicamos o operador (linear) sobre $C^\infty(I)$

$$\begin{aligned}
P\Big(\tfrac{d}{dt}\Big)(f) \ &= a_n\tfrac{d^n}{dt^n}(f) + a_{n-1}\tfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(f) + ... + a_1\tfrac{d}{dt}(f) + a_0 I(f) \\
&= a_n\tfrac{d^n f}{dt^n} + a_{n-1}\tfrac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}} + ... + a_1\tfrac{df}{dt} + a_0 f \\
&= a_n f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + ... + a_1 f' + a_0 f \ .
\end{aligned}$$

Lema 3. Se $P(t)$ e $Q(t)$ são dois polinômios com coeficientes reais então,

$$P\Big(\frac{d}{dt}\Big)\circ Q\Big(\frac{d}{dt}\Big) = Q\Big(\frac{d}{dt}\Big)\circ P\Big(\frac{d}{dt}\Big) \ = (PQ)\Big(\frac{d}{dt}\Big).$$

Verificação:

Segue do Lema 2 e da constatação que o resultado valo no caso de monômios polinomiais $P(t) = a_i t^i$ e $Q(t) = b_j t^j$, com $i\,, j \in \mathbb{N}$ e arbitrários e $a_i\,, b_j \in \mathbb{R}$ e também arbitrários ∎

II - EDO'S LINEARES COM COEFICIENTES REAIS E DE ORDEM 2

II.1 - Introdução

Analizemos primeiro a equação **homogênea** com coeficientes b e c reais,

$$(*) \qquad x''(t) + bx'(t) + cx'(t) = 0\,, \quad t \in I\,, \quad I \text{ um intervalo real}\,.$$

Proposição 1. O conjunto das soluções de (*) é um espaço vetorial.

Prova:

É trivial verificar que se $x_1 = x_1(t)$ e $x_2 = x_2(t)$ são duas soluções arbitrárias de (*) então $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ e $Cx_1(t)$, qualquer que seja $C \in \mathbb{R}$, também são soluções de (*) ∎

Definições: O **polinômio característico** associado à equação (*) é:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c \ = \ (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ ,$$

onde λ_1 e λ_2 são as **raízes características** de $p = p(\lambda)$ e $\lambda_1 + \lambda_2 = -b$ e $\lambda_1\lambda_2 = c$.

II.2 - EDOL de 2 Ordem, Homogênea e com Raízes Características Reais

Analizando o caso em que em que as raízes características de $p = p(\lambda)$, λ_1 e λ_2, são **reais**, simples ou não, a fatoração (vide Lema 3) do **operador** $\frac{d^2}{dt^2} + b\frac{d}{dt} + cI$ é,

$$\frac{d^2}{dt^2} + b\frac{d}{dt} + cI = (\frac{d}{dt} - \lambda_1 I)(\frac{d}{dt} - \lambda_2 I)\ ,$$

e reduzimos o problema de encontrar as soluções de (*) ao de determinar as de

$$(1) \qquad (\frac{d}{dt} - \lambda_1 I)(\frac{d}{dt} - \lambda_2 I)x \ = \ 0\,,$$

que equivale a resolver o sistema com duas equações diferenciais lineares de 1 ordem,

$$(S1) \qquad \begin{cases} (\frac{d}{dt} - \lambda_2 I)x = g \\ (\frac{d}{dt} - \lambda_1 I)g = 0 \ . \end{cases}$$

Da 2 equação de (S1) temos $g(t) = Ae^{\lambda_1 t}\,, A \in \mathbb{R}$. Então, $x = x(t)$ a solução de (1) satisfaz

$$x' - \lambda_2 x = Ae^{\lambda_1 t}\ .$$

Pelo fator integrante $\mu(t) = e^{-\lambda_2 t}$ obtemos a equação abaixo que estudaremos em casos,

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}\Big\{ \ x(t)e^{-\lambda_2 t} \ \Big\} \ = \ x'(t)e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 x(t)e^{-\lambda_2 t} \ = \ Ae^{(\lambda_1-\lambda_2)t}.$$

Caso 1: Se λ_1 e λ_2 são reais e distintas, A é real e a integração de (2) nos dá,

$$x(t)e^{-\lambda_2 t} \ = \ \frac{A}{\lambda_1-\lambda_2}e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} \ + \ B \ , \quad A, B \in \mathbb{R},$$

e, multiplicando por $e^{\lambda_2 t}$ concluímos, $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}\,,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Caso 2: Se a raíz é dupla, $\lambda_o = \lambda_1 = \lambda_2$, então λ_o é real e (2) torna-se

$$\frac{d}{dt}\{ \ x(t)e^{-\lambda_0 t} \ \} \ = \ A, \quad A \in \mathbb{R},$$

que integrando obtemos $x(t)e^{-\lambda_o t} = At + B$, $B \in \mathbb{R}$, e assim,

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_o t} + c_2 t e^{\lambda_o t}\,,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Provamos então o resultado abaixo.

Teorema 1. Se as raízes características λ_1 e λ_2 de (*) são reais a solução geral de (*) é,

(a) Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$, quaisquer que sejam $A, B \in \mathbb{R}$.

(b) Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $x(t) = Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t}$, quaisquer que seja $A, B \in \mathbb{R}$.

Lema 4. Suponhamos λ_1 e λ_2 números reais.

(a) Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\}$ é linearmente independente.

(b) Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, o conjunto $\{e^{\lambda t}, te^{\lambda t}\}$ é linearmente independente.

Prova:

(a) Sejam $A, B \in \mathbb{R}$ tais que $x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} = 0\,, \forall t \in \mathbb{R}$. Computando $x(t)$ em $t = 0$, e em seguida derivando $x(t)$, $x'(t) = A\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + B\lambda_2 e^{\lambda_2 t}$, e computando $x'(t)$ em $t = 0$, obtemos o sistema linear,

$$\begin{cases} A + B & = 0 \\ A\lambda_1 + B\lambda_2 & = 0\,, \end{cases}$$

com **determinante de Vandermonde**, de ordem dois,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} \ = \ \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0\,,$$

e obtemos $A = B = 0$ e portanto, a independência linear afirmada.

(b) Sejam $A, B \in \mathbb{R}$ tais que $Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t} = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Então, cancelando $e^{\lambda t}$, temos $A + Bt = 0\,, \forall t \in \mathbb{R}$, e portanto, pelo princípio da identidade polinomial, $A = B = 0$ ∎

Corolário 1. O espaço vetorial das soluções de (*) tem dimensão dois e é gerado por um par de soluções (linearmente independentes) $\{x_1\,,x_2\}$ de (*) tal que $x_1(0) = 1$ e $x_1'(0) = 0$ e, ainda, $x_2(0) = 0$ e $x_2'(0) = 1$. Isto é,

$$\begin{bmatrix} x_1(0) & x_2(0) \\ x_1'(0) & x_2'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prova:

Notemos que, obviamente, se x_1 e x_2 satisfazem as condições dadas então $\{x_1, x_2\}$ é L.I.

Mantendo a notação do Lema 4, separemos a análise em dois casos:

(a) Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, definindo $f_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ e $f_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ temos, vide prova do Lema 4,

$$\begin{vmatrix} f_1(0) & f_2(0) \\ f_1'(0) & f_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} \neq 0\ .$$

Logo, existem $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{bmatrix} f_1(0) & f_2(0) \\ f_1'(0) & f_2'(0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} f_1(0) & f_2(0) \\ f_1'(0) & f_2'(0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Desta forma, $x_1(t) = Af_1(t)+Bf_2(t)$ e $x_2(t) = Cf_1(t)+Df_2(t)$ satisfazem o desejado.

(b) Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, temos $f_1(t) = e^{\lambda t}$, $f_1'(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $f_2(t) = te^{\lambda t}$, $f_2'(t) = e^{\lambda t} + t\lambda e^{\lambda t}$ e

$$\begin{vmatrix} f_1(0) & f_2(0) \\ f_1'(0) & f_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} \neq 0\ ,$$

e então a prova prossegue como no ítem (a) ∎

Definição: Dadas duas soluções $x_1 = x_1(t)$ e $x_2 = x_2(t)$ de (*), o conjunto $\{x_1\,,x_2\}$ é um **sistema fundamental, ou base, de soluções** de (*) se $\{x_1, x_2\}$ é linearmente independente e se toda solução de (*) é combinação linear de x_1 e x_2.

Exemplo 1. Determine a solução geral de $2y'' + 8y' - 10y = 0$.

Resolução:

Não é necessário "normalizar" a edo, dividindo-a por 2 (dois) pois o conjunto das soluções é um espaço vetorial e as raízes do polinômio $p(\lambda) = 2\lambda^2 + 8\lambda - 10$ não se alteram se o polinômio é multiplicado ou dividido por uma constante não nula. As raízes características são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -5$. A solução geral é então

$$y(t) = Ae^{t} + Be^{-5t} \quad ∎$$

Neste texto, para abreviar, chamamos de **base simples**, relativa a $t_0 \in I$, uma base ordenada de soluções $\{x_1, x_2\}$ de (*) tal que $x_1(t_0) = 1$, $x_1'(t_0) = 0$, $x_2(t_0) = 0$ e $x_2'(t_0) = 1$. Logo mostraremos que a base simples relativa a t_0 é única.

Exemplo 2. Determine uma (a) base simples de soluções, relativa a $t_0 = 0$, da equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0 \ .$$

Resolução:

O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2)$ e as raízes características são $\lambda = -1$ e $\lambda = -2$. O conjunto ordenado $\{x_1(t) = e^{-t}, x_2(t) = e^{-2t}\}$ é uma base de soluções. Para determinarmos a base simples resolvemos as equações matriciais, observando que $x_1(0) = x_2(0) = 1$ e $x_1'(0) = -1$ e $x_2'(0) = -2$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Ou, equivalentemente, os sistemas lineares,

$$\begin{cases} A + B & = 1 \\ -A - 2B & = 0 \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} C + D & = 0 \\ -C - 2D & = 1 \ . \end{cases}$$

Logo, $A = 2$, $B = -1$, $C = 1$ e $D = -1$ e a base simples (ordenada), relativa a $t_0 = 0$, é

$$\{2e^{-t} - e^{-2t}, e^{-t} - e^{-2t}\} \ .$$

Adendo à resolução:

As duas equações matriciais apresentadas são redutíveis a uma única equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e então, pela fórmula para inversão de um matriz 2×2 inversível:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix},$$

obtemos

$$\begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3. Determine uma base simples de soluções, relativa a $t_0 = 0$, da equação

$$x'' + 6x' + 9x = 0 \ .$$

Resolução:

O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2$ e a raíz característica dupla é $\lambda = -3$. O conjunto ordenado $\{x_1(t) = e^{-3t}, x_2(t) = te^{-3t}\}$ é uma base de soluções.

Para determinarmos a base simples, notando que $x_1(0) = 1$, $x_1'(0) = -3$, $x_2(0) = 0$, $x_2'(t) = e^{-3t} - 3te^{-3t}$ e $x_2'(0) = 1$, resolvemos os sistemas matriciais,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

ou, equivalentemente, os sistemas lineares,

$$\begin{cases} A & = 1 \\ -3A + B & = 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} C & = 0 \\ -3C + D & = 1 \ . \end{cases}$$

Logo, $A = 1$, $B = 3$, $C = 0$ e $D = 1$ e portanto a base simples em $t_0 = 0$ é

$$\{e^{-3t} + 3te^{-3t}, te^{-3t}\} \quad \blacksquare$$

Paa verificar se duas soluções de (*) formam uma base de soluções de (*) é útil o conceito de **wronskiano** associado ao conjunto $\{f_1, f_2\}$ de duas funções deriváveis arbitrárias:

$$W[f_1, f_2](t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{vmatrix} .$$

Proposição 2. Se $x_1 = x_1(t)$ e $x_2 = x_2(t)$ são soluções de (*) então o wronskiano $W[x_1, x_2](t)$ satisfaz a equação diferencial linear de 1 ordem:

$$W'[x_1, x_2](t) = -b\,W[x_1, x_2](t) .$$

Demonstração:

Por hipótese temos,

$$(S2) \qquad \begin{cases} x_1'' + bx_1' + cx_1 & = 0 \\ x_2'' + bx_2' + cx_2 & = 0 \ . \end{cases}$$

Ainda, pela fórmula para o wronskiano, $W(x_1, x_2)(t) = x_1x_2' - x_1'x_2$ e portanto,

$$W'[x_1, x_2] = x_1'x_2' + x_1x_2'' - x_1''x_2 - x_1'x_2' = x_1x_2'' - x_1''x_2 .$$

Substituindo nesta as expressões para x_1'' e x_2'' obtidas de (S2) obtemos,

$$\begin{aligned} W'[x_1, x_2] &= x_1\big(-bx_2' - cx_2\big) - x_2\big(-bx_1' - cx_1\big) \\ &= -b(x_1x_2' - x_1'x_2) = -bW[x_1, x_2] \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolário 2. Com as mesma hipóteses que na Proposição 2, fixado qualquer $t_0 \in I$ temos,

(a) $W[x_1, x_2](t) = Ce^{-b(t-t_0)}$, $C = W[x_1, x_2](t_0)$.

(b) Ou $W[x_1, x_2](t) = 0$, $\forall t \in I$, ou então $W[x_1, x_2](t) \neq 0, \forall t \in I$.

Prova:

(a) Segue da Proposição 2 e da fórmula para a solução de edol's homogêneas de 1 ordem.

(b) Segue de (a) $\blacksquare$

Dadas duas funções f_1 e f_2 deriváveis quaisquer é óbvio que se $\{f_1, f_2\}$ é L.D. então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f_1 = \lambda f_2$ ou $f_2 = \lambda f_1$ e, em qualquer destes casos, $W[f_1, f_2] \equiv 0$. Mostremos que se f_1 e f_2 são soluções de (*) então vale a recíproca.

Lema 5. Suponhamos que $x = x(t)$ é solução de:

$$(**) \qquad \begin{cases} x'' + bx' + cx & = 0 \\ x(t_0) & = 0 \\ x'(t_0) & = 0 \ . \end{cases}$$

Então, $x(t) = 0$ para todo $t \in I$.

Prova:

Inicialmente notemos que se $x(t)$ satisfaz o PVI (Problema com Valor Inicial) acima, a função $y(t) = x(t + t_0)$ é uma solução de (*) tal que $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

Se $\{x_1 , x_2\}$ é a base simples de soluções dada pelo Corol. 1, existem $A, B \in \mathbb{R}$ tais que $y(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t)$. Logo, $0 = y(0) = Ax_1(0) + Bx_2(0) = A$ e $0 = y'(0) = Ax_1'(0) + Bx_2'(0) = B$ e portanto $y(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) = 0 \, , \forall t \in I$ e $x(t) = y(t - t_0) = 0 \, , \forall t \in I$ ■

Corolário 3. Se f_1 e f_2 são soluções de (*) e $W[f_1, f_2] \equiv 0$ então $\{f_1, f_2\}$ é L.D.

Demonstração:

Fixando $t_0 \in I$, como $W[f_1, f_2](t_0) = 0$, existe $A, B \in \mathbb{R}$ não ambos nulos tais que

$$\begin{bmatrix} f_1(t_0) & f_2(t_0) \\ f_1'(t_0) & f_2'(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Logo, $f = Af_1 + Bf_2$ é solução de (**) e então $Af_1 + Bf_2 \equiv 0$, com A ou B não zero. Consequentemente, f_1 e f_2 são linearmente dependentes ■

Corolário 4. Dados x_0 e y_0 reais quaisquer e $t_0 \in I$, existe uma única solução do PVI

$$(***) \qquad \begin{cases} x'' + bx' + cx & = 0 \\ x(t_0) & = x_0 \\ x'(t_0) & = y_0 \ . \end{cases}$$

Prova:

Existência: Através da translação $y(t) = x(t+t_0)$, podemos assumir $t_0 = 0$. Assim sendo, se $\{x_1 , x_2\}$ é a base de soluções dada pelo Corolário 1 uma solução de (***) é,

$$x(t) = x_0 x_1(t) + y_0 x_2(t) \ .$$

Unicidade: Se $x(t)$ e $y(t)$ são duas soluções de (***) então $x(t) - y(t)$ é solução de (**) e então, pelo Lema 5, $x(t) - y(t) = 0 \, , \forall t \in I$ ■

II.3 - EDOL de 2ª Ordem, Homogênea e com Raízes Características Complexas

Introduzamos os conceitos de integração e derivação para funções definidas em uma variável real a valores em $\mathbb{C}$.

Definições: Dada $f : I \to \mathbb{C}$, $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $f = f_1 + if_2$, com $f_1 = Re(f)$ e $f_2 = Im(f)$, definimos, se existir, a integral definida de f por,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + i\int_a^b f_2(x)dx \ ;$$

e a derivada de f por,

$$f'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f_1(t+h)-f_1(t)}{h} + i\lim_{h\to 0}\frac{f_2(t+h)-f_2(t)}{h} = f_1'(t) + if_2'(t) \ ,$$

e uma primitiva de f como qualquer função $F : I \to \mathbb{C}$ tal que $F'(t) = f(t), \forall t \in I$.

Lema 6. (Segundo limite fundamental, em $\mathbb{C}$) Para $z \in \mathbb{C}$ temos, $\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z} = 1$.

Prova: Será feita no capítulo sobre Séries de Potências ■

Lema 7. Para $x(t) = e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{C}$ e $t \in I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ temos, $x'(t) = \lambda e^{\lambda t}$.

Prova: Utilizando o segundo limite fundamental obtemos, supondo $\lambda \neq 0$,

$$x'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{x(t+h)-x(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{\lambda(t+h)}-e^{\lambda t}}{h} = \lim_{h\to 0} e^{\lambda t}\ \frac{e^{\lambda h}-1}{h} = \lim_{h\to 0}\lambda e^{\lambda t}\ \frac{e^{\lambda h}-1}{\lambda h} = \lambda e^{t} ■$$

Notações: $\mathbb{K}$ indica $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ e $C^k(I;\mathbb{K})$ é o espaço das funções $f : I \to \mathbb{K}$ com as derivadas até ordem k contínuas.

Para edol's de 1ª ordem com coeficientes complexos e $f : I \to \mathbb{C}$ temos o resultado abaixo.

Proposição 2. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in C(I)$ e $t_o \in I$. Para $x \in C^1(I;\mathbb{C})$ temos,

$$x'(t) - \lambda x(t) = f(t) \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = e^{\lambda t}\int_{t_o}^t e^{-\lambda s} f(s)ds \ + \ c_1 e^{\lambda t}\ , \quad c_1 \in \mathbb{K}.$$

Prova: Utilizando o fator integrante $e^{-\lambda t}$ obtemos,

$$x' - \lambda x = f \Leftrightarrow x'e^{-\lambda t} \ - \ \lambda x e^{-\lambda t} \ = fe^{-\lambda t} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\{\ x(t)e^{-\lambda t}\} \ = \ e^{-\lambda t} f(t).$$

Concluímos então,

$$x' - \lambda x = f \Leftrightarrow x(t)e^{-\lambda t} \ = \ \int_{t_o}^t e^{-\lambda s} f(s)ds + c_1\ , \ c_1 \in \mathbb{K} \quad ■$$

Adendo: Temos que $x_p(t) = \int_{t_o}^t e^{-\lambda s} f(s)ds$ é uma solução particular da edo considerada e $x_h(t) = c_1 e^{\lambda t}$ é a solução geral da equação homogênea associada.

Retornemos à análise da equação

$$(*) \qquad x''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0\,, \quad t \in I \subset \mathbb{R},$$

com $b, c \in \mathbb{R}$, e supondo agora que as raízes características são **complexas e não reais**. O resultado abaixo simplifica a análise e passamos a procurar soluções complexas da edo.

Proposição 3. Uma função $z : I \to \mathbb{C}$ é uma solução complexa de

$$(*)_{\mathbb{C}} \qquad z''(t) + bz'(t) + cz(t) = 0\,, \quad t \in I = (a,b) \subset \mathbb{R},$$

se e somente se as partes real e imaginária de = $z(t)$ são soluções reais de (*).

Prova:

Escrevendo $z(t) = x(t) + iy(t)$, $x(t)$ e $y(t)$ números reais, basta notar que

$$z'' + bz' + cz = [x'' + bx' + cx] \ + \ i\,[y'' + by' + cy\,] \ \blacksquare$$

Graças a tal proposição e analogamente ao caso em que as raízes características são reais, considerando a fatoração do **operador** $\frac{d^2}{dt^2} + b\frac{d}{dt} + cI$,

$$\frac{d^2}{dt^2} + b\frac{d}{dt} + cI = (\frac{d}{dt} - \lambda_1 I)(\frac{d}{dt} - \lambda_2 I)\ ,$$

reduzimos o problema de encontrar as soluções de $(*)_{\mathbb{C}}$ ao de determinar as de

$$(1) \quad (\frac{d}{dt} \ - \ \lambda_1 I)(\frac{d}{dt} \ - \ \lambda_2 I)z \ = \ 0.$$

Pela Proposição 2 a função g, $g = (\frac{d}{dt} - \lambda_2 I)z$, satisfaz $(\frac{d}{dt} - \lambda_1 I)g = 0$ se e somente se $g(t) = k_1 e^{\lambda_1 t}, k_1 \in \mathbb{C}$. Então, $z = z(t)$ é uma solução complexa de (1) se e somente se

$$z' - \lambda_2 z = k_1 e^{\lambda_1 t}\,, \quad k_1 \in \mathbb{C}\,;$$

e para tal equação, com o fator integrante $\mu(t) = e^{-\lambda_2 t}$ obtemos a equação equivalente

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}\{\ z(t)e^{-\lambda_2 t}\ \} \ = \ z'(t)e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 z(t)e^{-\lambda_2 t} \ = \ k_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}.$$

Se $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\overline{\lambda_1} = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$ (notemos que $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$), integrando (2) obtemos

$$z(t)e^{-(\alpha - i\beta)t} \ = \ k_1 \frac{e^{2\beta i t}}{2\beta i} \ + \ k_2, \quad k_2 \in \mathbb{C}\,,$$

que multiplicando por $e^{(\alpha - i\beta)t}$, indica que $z(t)$ é solução de $(*)_{\mathbb{C}}$ se e somente se

$$z(t) = \frac{k_1}{2\beta i} e^{(\alpha + i\beta)t} + k_2 e^{(\alpha - i\beta)\,t}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{C}.$$

Analogamente ao Lema 4(a), $\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\}$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, é linearmente independente sobre $\mathbb{C}$.

Como a edo $z'' + az' + bz = 0$ tem coeficientes reais e $z(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}$ é solução complexa, segue que são soluções reais da edo as partes real, $x_1(t)$, e a imaginária, $x_2(t)$, de $z(t)$:

$$x_1(t) = e^{\alpha t} cos\beta t \ , \qquad x_2(t) = e^{\alpha t} sen\beta t.$$

Ainda mais, como

$$\begin{cases} e^{(\alpha+i\beta)t} & = e^{\alpha t}\cos\beta t \, + \, ie^{\alpha t}\sin\beta t \\ e^{(\alpha-i\beta)t} & = e^{\alpha t}\cos\beta t \, - \, ie^{\alpha t}\sin\beta t \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} e^{\alpha t}\cos\beta t & = \frac{1}{2}e^{(\alpha+i\beta)t} + \frac{1}{2}e^{(\alpha-i\beta)t} \\ e^{\alpha t}\sin\beta t & = \frac{1}{2i}e^{(\alpha+i\beta)t} - \frac{1}{2i}e^{(\alpha-i\beta)t} \end{cases},$$

o espaço das soluções de $(*)_{\mathbb{C}}$ é também o conjunto das combinações lineares com coeficientes complexos de $e^{\alpha t}\cos\beta t$ e $e^{\alpha t}\sin\beta t$ e o conjunto $\{e^{\alpha t}\cos\beta t\, , e^{\alpha t}\sin\beta t\}$ é também linearmente independente sobre $\mathbb{C}$ e, por maior razão, linearmente independente sobre $\mathbb{R}$.

As partes real e imaginária de $w(t) = e^{(\alpha-i\beta)\,t}$ sendo $y_1(t) = e^{\alpha t}cos\beta t$ e $y_2(t) = -e^{\alpha t}sen\beta t$, o conjunto das combinações lineares das funções y_1, y_2 é igual a seu análogo para x_1, x_2. Logo, $z = z(t)$ e $w = w(t)$ fornecem o mesmo espaço de soluções reais.

Sumarizando, provamos o resultado abaixo.

Teorema 2. Suponhamos que as raízes do polinômio característico associado à equação (*), λ_1 e λ_2, são complexas não reais: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, com $\beta \neq 0$.

(a) A solução (real) geral de (*) é dada por,

$$x(t) = Ae^{\alpha t}\cos\beta t \;+\; Be^{\alpha t}\sin\beta t\,, \quad \text{com } A, B \in \mathbb{R}.$$

(b) O conjunto $\{e^{\alpha t}\cos\beta t\, , e^{\alpha t}\sin\beta t\}$ é uma base de soluções de (*).

Prova: Feita acima $\blacksquare$

Exemplo 4. (Movimento Harmônico Simples) Determine a solução geral de

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0\,, \quad \omega \in \mathbb{R}^* \ .$$

Resolução:

O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda^2 = (\lambda - \omega i)(\lambda + \omega i)$. A solução geral complexa é

$$z(t) = c_1 e^{\omega i t} + c_2 e^{-\omega i t}\,, \quad c_1\,, c_2 \in \mathbb{C}\,,$$

e a solução geral real $x(t)$ é a combinação linear real das partes real e imaginária de $e^{\omega i t}$:

$$x(t) = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t\,, \quad c_1\,, c_2 \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

Exemplo 5. Determine a solução do problema

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = 0\,, \quad x(0) = 1 \text{ e } \dot{x}(0) = 0\ .$$

Resolução:

O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$, com raízes $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. As soluções complexas da edo são combinações lineares complexas de

$$e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)t} \text{ e } e^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)t}\ ,$$

as soluções reais são da forma

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{t}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2 e^{-\frac{t}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\,, \quad c_1\,, c_2 \in \mathbb{R}\ ,$$

e a solução procurada é [verifique e, também, veja prova do Teorema 2(b)]

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}\,t}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{t}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}\,t}{2} \quad \blacksquare$$

II.3 - EDOL de 2 Ordem Não Homogênea

Dado um intervalo real I, b e c números reais e uma função real contínua $f : I \to \mathbb{R}$, analizemos a edol (não homogênea se $f \neq 0$),

$$(NH) \qquad x'' + bx' + cx = f(t)\,,\ t \in I\ .$$

Mostremos que a solução geral é a soma de uma solução particular fixada com as soluções arbitrárias da equação homogênea associada,

$$(H) \qquad x'' + bx' + cx = 0\ .$$

Chamamos polinômio característico da equação (NH) o polinômio característico de (H).

Proposição 4. Se x_p é uma solução particular, fixa, de (NH) a solução geral de (NH) é

$$x_g = x_h + x_p\,, \qquad x_h \text{ uma solução arbitrária de (H)}\ .$$

Prova:

Se x_h é uma solução da equação homogênea (H) temos,

$$(x_p + x_h)'' + b(x_p + x_h)' + c(x_p + x_h) = (x_p'' + bx_p' + cx_p) + (x_h'' + bx_h' + cx_h) = f + 0 = f\ ,$$

mostrando que $x_p + x_h$ é solução de (NH).

Se $x = x(t)$ é uma solução arbitrária de (NH) temos,

$$(x - x_p)'' + b(x - x_p)' + c(x - x_p) = (x'' + bx' + cx) - (x_p'' + bx_p' + cx_p) = f - f = 0\ ,$$

mostrando que $x = (x - x_p) + x_p = x_h + x_p$, com $x_h = x - x_p$ solução de (H) $\blacksquare$

Como sabemos resolver edol's de 2 ordem homogêneas com coeficientes reais, a resolução da equação (NH) é, pela Prop. 4, redutível a determinação de uma sua solução particular.

No que segue desenvolvemos um método para encontrarmos uma solução particular nos casos que o termo independente na equação (NH), a função f, é do tipo :

$$(1) \qquad f(t) = \sum_{j=1}^{m} \left(a_j t^j e^{\gamma_j t} \cos \alpha_j t + b_j t^j e^{\delta_j t} \sin \beta_j \right), \quad a_j, b_j, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j \in \mathbb{R}, \forall 1 \le j \le n \ .$$

Simplificamos tal tarefa com os dois simples e importantes resultados abaixo:

Proposição 6 (Princípio de Superposição). Sejam f_1 e f_2 contínuas em I e a valores reais. Suponhamos que $x_1 = x_1(t)$ e $x_2 = x_2(t)$ são tais que

$$\begin{cases} x_1'' + bx_1' + cx_1 = f_1 \\ x_2'' + bx_2' + cx_2 = f_2 \ . \end{cases}$$

Então,

$$(x_1 + x_2)'' + b(x_1 + x_2)' + c(x_1 + x_2) = f_1 + f_2 \ .$$

Prova: Trivial ∎

Assim, reduzimos o problema de determinar uma solução particular para (NH), quando o termo independentente é uma função da forma dada em (1), para quando f tem a forma

$$(2) \qquad f(t) = P(t) e^{\alpha t} \cos \beta t \ \text{ ou}, \ f(t) = P(t) e^{\alpha t} \sin \beta t, \ P \text{ um polinômio real e } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ .$$

Com o próximo resultado conquistamos mais uma simplificação.

Proposição 7. Sejam $b, c \in \mathbb{R}$. Se $x : I \to \mathbb{C}$ é solução complexa de

$$x'' + bx' + cx = e^{(\alpha + i\beta)t} \ ,$$

então $\mathrm{Re}(x)$ e $\mathrm{Im}(x)$, as partes real e imaginária de $x(t)$ são soluções de, respectivamente,

$$x'' + bx' + cx = e^{\alpha t} cos \beta t \quad e \quad x'' + bx' + cx = e^{\alpha t} \sin \beta t \ .$$

Prova:

Consequência imediata da Proposição 3, e das identidades,

$$e^{\alpha t} \cos \beta t = \mathrm{Re}\left[e^{(\alpha + i\beta)t}\right] \quad \text{e} \quad e^{\alpha t} \sin \beta t = \mathrm{Im}\left[e^{(\alpha + i\beta)t}\right] \quad ∎$$

O que nos permite reduzir a investigação por uma solução particular de (NH), quando f tem a forma dada por (2), para o caso em que f admite a expressão,

$$(3) \qquad f = P(t) e^{\gamma t}, \quad P = P(t) \text{ um polinômio real e } \gamma \text{ complexo} \ .$$

No enunciado e na prova do resultado abaixo, P,P_1, Q, R e S são todos polinômios.

Teorema 3. Sejam $P = P(t)$, um polinômio com coeficientes reais, $\gamma \in \mathbb{C}$, e a equação,

$$(T3.1) \qquad x'' + bx' + cx = P(t)e^{\gamma t}\,.$$

(a) A função $x_p(t) = Q(t)e^{\gamma t}$, $Q(t)$ um polinômio na variável real t e com coeficientes reais ou complexos, é uma solução da equação dada se e somente se

$$(T3.2) \qquad Q'' + p'(\gamma)Q' + p(\gamma)Q = P\ ,$$

onde $p(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c$ é o polinômio característico da equação dada.

(b) Existe um polinômio Q resolvendo (T3.2) tal que

(i) Se $p(\gamma) \neq 0$, podemos supor grau(Q) =grau(P).

(ii) Se γ é raíz simples, $Q(t) = tP_1(t)$ e grau(P_1) =grau(P).

(iii) Se γ é raíz dupla, $Q(t) = t^2P_1(t)$ e grau(P_1) =grau(P).

Notemos que: γ raíz simples $\Rightarrow$ $p(\gamma) = 0$ e $p'(\gamma) \neq 0$; γ raíz dupla $\Rightarrow$ $p(\gamma) = p'(\gamma) = 0$.

Prova:

(a) Temos, é fácil computar,

$$x_p' = Q'e^{\gamma t} + \gamma Q e^{\gamma t} \quad , \quad x_p'' = Q''e^{\gamma t} + 2\gamma Q'e^{\gamma t} + \gamma^2 Q e^{\gamma t}.$$

Desta forma, procurando resolver a equação

$$x_p'' + bx_p' + cx_p = [(Q'' + 2\gamma Q' + \gamma^2 Q) + b(Q' + \gamma Q) + cQ]e^{\gamma t} = Pe^{\gamma t},$$

chegamos a

$$Q'' + (2\gamma + b)Q' + (\gamma^2 + b\gamma + c)Q = P,$$

ou,

$$Q'' + p'(\gamma)Q' + p(\gamma)Q = P \quad .$$

(b) Por suas imporância, faremos duas provas de (b)(i).

(i) **1 Prova:**

Se grau(P) $= n$ e $P = a_nt^n + a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + ...a_2t^2 + a_1t + a_0$, $a_i's \in \mathbb{R}$, supondo $Q = b_nt^n + b_{n-1}t^{n-1} + b_{n-2}t^{n-2} + ...b_2t^2 + b_1t + b_0$, $b_i's \in \mathbb{C}$, ao substituirmos tais expressões para P e Q em (T3.2) e identificando os coeficientes dos monômios t^n, t^{n-1}, t^{n-2},.....,t^2, t, 1 (nesta ordem) nos dois membros da equação (T3.2) obtemos um sistema linear com $n+1$ equações (uma para cada monômio) e $n+1$ incógnitas [b_n, b_{n-1},....,b_1 e b_0] possível e determinado. Verifique.

2 Prova:

Observação: Se $j \in \mathbb{N}$ temos, $\int t^j e^t\, dt = p(t)e^t$, p um polinômio de grau j. A verificação é feita por indução. De fato, temos $\int t^{j+1}e^t dt = t^{j+1}e^t - (j+1)\int t^j e^t dt$ e a afirmação vale se $j = 0$. Logo, se $p(t)$ é um polinômio de grau j, e $\lambda \neq 0$, segue que $\int p(t)e^{\lambda t}dt = q(t)e^{\lambda t}$, q um polinômio também de grau j.

Desta forma, para $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tais que:

$$\Big(\frac{d}{dt} - \lambda_1\Big)\Big(\frac{d}{dt} - \lambda_2\Big)Q = Q'' + p'(\gamma)Q' + p(\gamma)Q = P \quad [\lambda_1\lambda_2 = p(\gamma) \neq 0]\,,$$

temos,

$$Q' - \lambda_2 Q = e^{\lambda_1 t}\int e^{-\lambda_1 t}P(t)\,dt\,,$$

e, para $\int e^{-\lambda_1 t}P(t)\,dt = R(t)e^{-\lambda_1 t}$, R um polinômio com mesmo grau que P,

$$Q' - \lambda_2 Q = R(t)\,.$$

Iterando, escolhemos $Q(t) = e^{\lambda_2 t}\int e^{-\lambda_2 t}R(t)\,dt = S(t)$, grau$(S)$ =grau(R) =grau(P).

(ii) A equação (T3.2) se reduz a

$$Q'' + p'(\gamma)Q' = P\,,\ p'(\gamma) \neq 0\,,$$

que substituindo $R = Q'$ se escreve $R' + p'(\gamma)R = P$ cuja solução é (verifique) um polinômio R, grau(R) =grau(P). Então, utilizando a equação $Q' = R$, escolhemos o polinômio Q sem termo independente. Isto é, $Q(t) = tP_1(t)$, com grau(P_1) =grau(P).

(iii) Trivial ∎

Exemplo 6. Resolva a equação

$$\ddot{x} - 4x = (1 + t + t^2)e^{2t}\ .$$

Resolução: O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - 4$, com raízes $\lambda = \pm 2$. A solução geral da equação homogênea associada é,

$$x_h = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t}\,, c_1\,, c_2 \in \mathbb{R}\ .$$

Para uma solução particular $x_p(t) = Q(t)e^{2t}$, Q um polinômio, encontramos (vide (T3.2),

$$Q'' + p'(2)Q' + p(2)Q = 1 + t + t^2\ \ ;$$

logo, como $p(2) = 0$ e $p'(2) = 4$,

$$Q'' + 4Q' = 1 + t + t^2\,,$$

que resolvendo para $R = Q'$ temos que $R' + 4R = 1 + t + t^2$ admite solução $R = At^2 + Bt + C$; donde, $R' + 4R = (2At + B) + 4(At^2 + Bt + C) = 1 + t + t^2$ e portanto, $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{8}$ e $C = \frac{7}{32}$. Logo, escolhendo $Q = \int R(t)\,dt = \frac{t^3}{12} + \frac{t^2}{16} + \frac{7t}{32}$, a solução geral da equação dada é,

$$x_g(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t} + \Big(\frac{t^3}{12} + \frac{t^2}{16} + \frac{7t}{32}\Big) \quad \blacksquare$$

Exemplo 7. Determine a solução geral $x = x(t)$ da equação

$$x'' - 3x' + 2x = \cos t \; .$$

Resolução:

O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$ e assim a solução geral da equação homogênea é

$$x_h = c_1 e^t + c_2 e^{2t} \; .$$

Para encontrarmos uma solução real particular resolvemos a equação complexa

$$x'' - 3x' + 2x = e^{it} \quad [\cos t = \operatorname{Re}(e^{it})] \, ,$$

supondo uma solução particular $x_p(t) = Q(t)e^{it}$. Pelo Teorema 3, $Q = Q(t)$ satisfaz

$$Q'' + p'(i)Q' + p(i)Q = 1 \; .$$

Como $p'(\lambda) = 2\lambda - 3$ temos $p'(i) = 2i - 3$ e $p(i) = -1 - 3i + 2 = 1 - 3i$. Logo,

$$Q'' + (2i - 3)Q' + (1 - 3i)Q = 1 \, ,$$

que admite a óbvia solução $Q(t) = \frac{1}{1-3i} = \frac{1+3i}{10}$. Assim, $z_p(t) = \frac{1+3i}{10}e^{it}$ é uma solução particular complexa da equação dada e uma solução particular real é

$$x_p(t) = \operatorname{Re}\left\{\frac{(1+3i)(\cos t + i \sin t)}{10}\right\} = \frac{\cos t - 3\sin t}{10} \; .$$

Portanto, a solução geral da equação dada é:

$$x(t) = \frac{\cos t - 3\sin t}{10} + c_1 e^t + c_2 e^{2t} \, , \quad c_1 , c_2 \in \mathbb{R} \;\; \blacksquare$$

Exemplo 8. Resolva a equação

$$\ddot{x} + 4x = t^2 \sin 2t \; .$$

Resolução:

O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 + 4$, com raízes $\lambda = \pm 2i$. A solução geral complexa da equação homogênea associada é $z_1 e^{2it} + z_2 e^{-2it}$ e a solução geral real da equação homogênea associada é

$$x_h = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t \, , \quad c_1 , c_2 \in \mathbb{R} \; .$$

Como $\sin 2t = \operatorname{Im}(e^{2it})$, determinando uma solução particular $z_p(t) = Q(t)e^{2it}$ de

$$\ddot{x} + 4x = t^2 e^{2it} \, ,$$

uma solução particular real da equação dada é $x_p(t) = \operatorname{Im} z_p(t)$.

Temos,

$$Q'' + p'(2i)Q' + p(2i)Q = t^2 \ .$$

Como $p(2i) = 0$ e $p'(2i) = 4i$, efetuando a substituição $R = Q'$ obtemos a equação

$$R' + 4iR = t^2$$

donde, supondo $R = At^2{+}Bt{+}C$ temos $R' = 2At{+}B$ e $R'{+}4iR = (2At{+}B){+}4i(At^2{+}Bt{+}C) = t^2$. Assim, temos $A = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}$, $B = \frac{1}{8}$, $C = \frac{i}{32}$ e $Q' = R(t) = -\frac{i}{4}t^2 + \frac{1}{8}t + \frac{i}{32}$ e escolhemos $Q(t) = -\frac{t^3}{12}i + \frac{t^2}{16} + \frac{t}{32}i$; logo, a solução particular complexa é

$$z_p(t) = \Big(-\frac{t^3}{12}i + \frac{t^2}{16} + \frac{t}{32}i\Big)(\cos 2t + i\sin 2t) \ .$$

Uma solução particular real ao problema dado é então a parte imaginária de $z_p(t)$:

$$x_p(t) = \mathrm{Im}(z_p)(t) = -\frac{t^3\cos 2t}{12} + \frac{t^2\sin 2t}{16} + \frac{t\cos 2t}{32} \ .$$

Assim, a solução geral da edo dada é

$$x(t) = c_1\cos 2t + c_2\sin 2t + \Big[-\frac{t^3\cos 2t}{12} + \frac{t^2\sin 2t}{16} + \frac{t\cos 2t}{32} \Big], \quad c_1\,, c_2 \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

III.1 - EDOL de Ordem n com Coeficientes Reais e Homogênea

Teorema 4. Consideremos a edol de ordem n homogênea e coeficientes constantes reais,

$$(T4.1) \qquad x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + ... a_2x^{(2)} + a_1x^{(1)} + a_0x^{(0)} = 0\,,$$

de polinômio característico

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0,$$

com raízes $\lambda_j \in \mathbb{C}$ de multiplicidade $m_j \geq 1$, $1 \leq j \leq k$, k o número de raízes distintas. Então,

(a) O operador diferencial $P(\frac{d}{dt}) = \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + ... + a_2\frac{d^2}{dt^2} + a_1\frac{d}{dt} + a_0I$, fatora-se,

$$P(\frac{d}{dt}) = (\frac{d}{dt} - \lambda_1 I)^{m_1}.....(\frac{d}{dt} - \lambda_k I)^{m_k} \quad , \text{ se } p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}.....(\lambda - \lambda_k)^{m_k}\,.$$

(b) É linearmente independente, sobre $\mathbb{C}$, o conjunto

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C}} = \left\{t^l e^{\lambda_j t} : 1 \leq j \leq k \ \text{ e } \ 0 \leq l \leq m_j - 1\right\}.$$

(c) A função $z = z(t)$ é solução complexa de $P(\frac{d}{dt})z = 0$ se e somente se

$$z(t) = p_{m_1-1}(t)e^{\lambda_1 t} + ... + p_{m_k-1}(t)e^{\lambda_k t}\,,$$

$p_j(t)$ um polinômio com coeficientes complexos, ou nulo ou com grau menor ou igual a $(m_j - 1)$, para $1 \leq j \leq k$.

(d) O conjunto $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ é uma base de soluções complexas da edo (T4.1).

Demonstração:

(a) Segue do Lema 3.

(b) Mostremos que $\forall N \in \mathbb{N}^*$, quaisquer que sejam os números complexos λ_1, ..., λ_N, dois a dois distintos, todo subconjunto finito do conjunto infinito

$$X = \left\{t^j e^{\lambda_i t} : i = 1, ..., N \ \text{ e } j = 0, 1, 2, ...\right\}\,,$$

é linearmente independente.

Verificação: Se uma combinação linear finita, com escalares complexos, de elementos de X é a função nula, colocando $e^{\lambda_1 t}$,...., $e^{\lambda_N t}$ em evidência obtemos N polinômios com coeficientes complexos e na variável t, P_1,...., $P_N(t)$, tais que

$$P_1(t)e^{\lambda_1 t} + ... + P_N(t)e^{\lambda_N t} = 0\ , \forall t.$$

Mostremos por indução em N que todos os coeficientes de P_1,....,P_N são nulos.

De fato, se $N = 1$, temos $P_1(t)e^{\lambda_1 t} = 0$, $\forall t$, e portanto $P_1(t) = 0$, $\forall t$, e então as partes real e imaginária de P_1, $\mathrm{Re}(P_1)$ e $\mathrm{Im}(P_1)$, são polinômios com coeficientes reais que se anulam $\forall t$; logo, os coeficientes de $\mathrm{Re}(P_1)$ e $\mathrm{Im}(P_1)$, e assim os de P_1, são nulos. Supondo a afirmação verdadeira para N, provemo-la para $N+1$. Supondo então que

$$P_1(t)e^{\lambda_1 t} + P_2(t)e^{\lambda_2 t} + ... + P_{N+1}(t)e^{\lambda_{N+1} t} = 0\,,$$

dividindo esta equação por $e^{\lambda_1 t}$ obtemos,

$$P_1(t)+P_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}+....+P_{N+1}(t)e^{(\lambda_{N+1}-\lambda_1)t} = 0\,. \tag{4.2}$$

Computando, para algum natural m, $m > \mathrm{grau}(P_1)$, a derivada de ordem m dos membros de (4.2) notando que $\frac{d^m}{dt^m}\left\{P_j e^{(\lambda_j-\lambda_1)t}\right\} = [\,(\lambda_j-\lambda_1)^m P_j + \tilde{P}_j\,]\,e^{(\lambda_j-\lambda_1)t}$, com $\tilde{P}_j$ um polinômio de grau menor que o grau de P_j ou $\tilde{P}_j \equiv 0$, se $j \neq 1$, obtemos

$$[\,(\lambda_2-\lambda_1)^m P_2 + \tilde{P}_2\,]e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} \;+\; ...... \;+\; [\,(\lambda_{N+1}-\lambda_1)^m P_{N+1} + \tilde{P}_{N+1}\,]e^{(\lambda_{N+1}-\lambda_1)t} = 0.$$

Logo, pela hipótese de indução, $(\lambda_j-\lambda_1)^M P_j(t) + \tilde{P}_j(t) = 0$, $\forall t$, se $2 \le j \le N+1$, e assim, todos os coeficientes de $(\lambda_j-\lambda_1)^M P_j(t) + \tilde{P}_j(t)$, $2 \le j \le N+1$, são nulos e portanto o polinômio $(\lambda_j-\lambda_1)^M P_j(t)$, $2 \le j \le N+1$, não tem grau maior ou igual a 1, não é uma constante não nula e assim sendo, é o polinômio nulo e, como $(\lambda_j-\lambda_1) \neq 0$, $\forall j \neq 1$, segue que $P_j(t)$, $2 \le j \le N+1$, tem todos os coeficientes nulos e, retornando à equação (4.2), vemos que $P_1(t) = 0$, $\forall t$, e concluímos que P_1 tem todos os coeficientes nulos. Assim, encerramos a prova de (b).

(c) Dividiremos a prova deste item em três partes.

Afirmação 1. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$. Para todo $m \in \mathbb{N}^*$ temos,

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda I\right)^m z = 0 \;\Leftrightarrow\; z(t) = p_{m-1}(t)e^{\lambda t},$$

$p_{m-1}(t)$ um polinômio, ou nulo ou com coeficientes em $\mathbb{C}$ e $\mathrm{grau}(p_{m-1}) \le m-1$.

Verificação: Se $m = 1$, pela fórmula para edol's de ordem 1 temos

$$z' - \lambda z = 0 \Leftrightarrow z = c_1 e^{\lambda t}\,, c_1 \in \mathbb{C}\,.$$

Supondo a afirmação válida para m provemo-la para $m+1$. Seja $z = z(t)$ tal que

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda I\right)^{m+1} z = \left(\frac{d}{dt} - \lambda I\right)^m \left(\frac{d}{dt} - \lambda I\right) z = 0\,;$$

por hipótese de indução esta equação equivale a $(\frac{d}{dt} - \lambda I)z(t) = p_{m-1}(t)e^{\lambda t}$. Isto é,

$$z'(t) - \lambda z(t) = p_{m-1}(t)e^{\lambda t}\,,$$

e, multiplicando ambos os lados por $e^{-\lambda t}$,

$$\frac{d}{dt}\{\,z(t)e^{-\lambda t}\,\} = p_{m-1}(t)\,.$$

Finalmente, integrando concluímos a Afirmação 1,

$$z(t)e^{-\lambda t} = \int p_{m-1}(t)dt = p_m(t)\,.$$

Afirmação 2. Sejam $\lambda_1\,, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, e $m, l \in \mathbb{N}^*$. Temos,

$$(\frac{d}{dt} - \lambda_1 I)^m (\frac{d}{dt} - \lambda_2 I)^l z = 0 \;\Leftrightarrow\; z(t) \;=\; p_{m-1}(t)e^{\lambda_1 t} + q_{l-1}(t)e^{\lambda_2 t}, \tag{4.3}$$

onde p_{m-1} e q_{l-1} são polinômios com coeficientes complexos ou nulos (não necessariamente ambos) ou de grau menor ou igual a $m-1$ e $l-1$, respectivamente.

Verificação:

Mostraremos por indução em m que para todo $m \geq 1$, (4.3) é verdadeira $\forall l \geq 1$.

(Passo 1, $m = 1$**)** Mostremos, por indução em $l \geq 1$, que

$$(\frac{d}{dt} - \lambda_1 I)(\frac{d}{dt} - \lambda_2 I)^l z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + q_{l-1}(t)e^{\lambda_2 t} \;\;,\;\; k_1 \in \mathbb{K}\ .$$

Se $l = 1$ e $v = (\frac{d}{dt} - \lambda_2 I)z$ temos,

$$v' - \lambda_1 v = (\frac{d}{dt} - \lambda_1 I)(\frac{d}{dt} - \lambda_2 I)z = \;0 \quad \Leftrightarrow \quad v \;=\; z' - \lambda_2 x = k_1 e^{\lambda_1 t} \;\;, k_1 \in \mathbb{C}\ .$$

Porém, utilizando o fator integrante $e^{-\lambda_2 t}$ e integrando,

$$z' - \lambda_2 z = k_1 e^{\lambda_1 t} \;\;\Leftrightarrow\;\; \frac{d}{dt}\{\, z(t)e^{-\lambda_2 t}\,\} = k_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} \;\;\Leftrightarrow z(t)e^{-\lambda_2 t} = c_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + c_2\,,\; c_2 \in \mathbb{C}\ .$$

Logo, $(\frac{d}{dt} - \lambda_1 I)(\frac{d}{dt} - \lambda_2 I)z = \;0 \quad \Leftrightarrow \quad z(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \;\;=\;\; p_0 e^{\lambda_1 t} + q_0 e^{\lambda_2 t}$.

Supondo (4.3) válida para l provemo-la para $l+1$. Seja então $z = z(t)$ tal que,

$$(\frac{d}{dt} - \lambda_1 I)(\frac{d}{dt} - \lambda_2 I)^{l+1} z = 0\ .$$

Logo,

$$(\frac{d}{dt} - \lambda_1 I)(\frac{d}{dt} - \lambda_2 I)^l (\frac{d}{dt} - \lambda_2 I)z = 0\ ,$$

e, pela hipótese de indução, tal equação é equivalente a,

$$z' - \lambda_2 z \;\;=\;\; k_1 e^{\lambda_1 t} + q_{l-1}(t)e^{\lambda_2 t}\;\;,\;\; k_1 \in \mathbb{C}\ ,$$

a qual, multiplicando por $e^{-\lambda_2 t}$ equivale a

$$\frac{d}{dt}\{\;z(t)e^{-\lambda_2 t}\;\} \;\;=\;\; k_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + q_{l-1}(t),$$

que, integrando e multiplicando por $e^{\lambda_2 t}$, equivale a $z(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} \;+\; q_l(t)e^{\lambda_2 t}$, $k_1 \in \mathbb{C}$.

(Passo 2) Supondo que para $m \geq 1$, m fixo, (4.3) é válida para todo $l \geq 1$, provemos que para $m+1$ (4.3) também é verdadeira para todo $l \geq 1$.

Considerando $z = z(t)$ e $l \in \mathbb{N}$, l arbitrário, a equação,

$$(\frac{d}{dt} - \lambda_1 I)^{m+1}(\frac{d}{dt} - \lambda_2 I)^l z = 0,$$

pode ser reescrita na forma,

$$(\frac{d}{dt} - \lambda_1 I)^m (\frac{d}{dt} - \lambda_2 I)^l (\frac{d}{dt} - \lambda_1 I)z = 0,$$

a qual, pela hipótese de indução, equivale a

$$z' - \lambda_1 z = (\frac{d}{dt} - \lambda_1 I)z = p_{m-1}e^{\lambda_1 t} + q_{l-1}e^{\lambda_2 t},$$

e esta, por sua vez, multiplicando-a por $e^{-\lambda_1 t} \neq 0$, equivale a

$$\frac{d}{dt}\{ z(t)e^{-\lambda_1 t} \} = z'e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 z e^{-\lambda_1 t} = p_{m-1} + q_{l-1}e^{(\lambda_2-\lambda_1)t},$$

a qual, integrando e utilizando a observação na prova do Teorema 3(b), reescrevemos

$$z(t)e^{-\lambda_1 t} = p_m(t) + \int q_{l-1}(s)e^{(\lambda_2-\lambda_1)s}ds = p_m(t) + r_{l-1}(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t},$$

r_{l-1} um polinômio com coeficientes em $\mathbb{C}$, ou nulo ou de grau menor ou igual a $l-1$.

(d) Consequência imediata de (b) e (c) $\blacksquare$

Mantendo a notação e as hipóteses do Teorema 4 temos os resultados que seguem.

Corolário 5. Se as k raízes características λ_j são todas reais o espaço vetorial das soluções reais da equação (T4.1) tem por base de soluções (reais):

$$\{ t^i e^{\lambda_j t} : 1 \leq j \leq k, \quad 0 \leq i \leq m_j - 1, \quad m_j \text{ a multiplicidade da raíz } \lambda_j \}.$$

Prova:

Basta notar que a parte real (e a imaginária) das soluções complexas são soluções reais de (T4.1) e que como o conjunto dado é L.I. sobre $\mathbb{C}$ então ele também o é sobre $\mathbb{R}$ $\blacksquare$

Adendo Apresentemos uma prova simples de que, se $p(\alpha) = 0$ então $t^j e^{\alpha t}$ é solução de $P(\frac{d}{dt})x = 0$, se $1 \leq j \leq m-1$, onde $m = m(\alpha)$ é a multiplicidade da raíz α. Temos,

$$(\frac{d}{dt} - \alpha I)^m t^j e^{\alpha t} = (\frac{d}{dt} - \alpha I)^{m-1}(\frac{d}{dt} - \alpha I)t^j e^{\alpha t} =$$

$$= (\frac{d}{dt} - \alpha I)^{m-1}(jt^{j-1}e^{\alpha t} + t^j \alpha e^{\alpha t} - \alpha t^j e^{\alpha t}) = j(\frac{d}{dt} - \alpha I)^{m-1}(t^{j-1}e^{\alpha t}) .$$

Iterando e notando que $n-j \geq 1$, se $1 \leq j \leq n-1$, obtemos

$$(\frac{d}{dt} - \alpha I)^n t^j e^{\alpha t} = j!(\frac{d}{dt} - \alpha I)^{n-j} e^{\alpha t} = 0 \quad \blacksquare$$

Lema 9. Se $\lambda = \alpha + i\beta$, α, $\beta \in \mathbb{R}$, com $\beta \neq 0$, são iguais os espaços vetoriais complexos gerados pelos conjuntos de funções $\{t^j e^{\lambda t}, t^j e^{-\lambda t}\}$ e $\{t^j \cos\lambda t, t^j \sin\lambda t\}$, $j \in \mathbb{N}$.

Prova:

Basta notar que

$$\begin{cases} t^j e^{\lambda t} & = t^j \cos\lambda t + it^j \sin\lambda t, \\ t^j e^{-\lambda t} & = t^j \cos\lambda t - it^j \sin\lambda t \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} t^j \cos\lambda t & = \frac{1}{2}t^j e^{\lambda t} + \frac{1}{2}t^j e^{-\lambda t} \\ t^j \sin\lambda t & = \frac{1}{2i}t^j e^{\lambda t} - \frac{1}{2i}t^j e^{-\lambda t} \end{cases} \quad \blacksquare$$

Corolário 6. Suponhamos que

$$\{\lambda_1\,,\lambda_2\,,\,\ldots.\lambda_r\} \quad \text{e} \quad \{\mu_1\,,\overline{\mu_1}\,,\,\ldots.\,\mu_s\,,\overline{\mu_s}\}\,,$$

sejam, respectivamente, o conjunto das r (distintas) raízes reais e o conjunto das $2s$ (distintas) raízes complexas não reais, do polinômio característico da equação (T4.1). Seja m_j a multiplicidade da raíz λ_j, $1 \le j \le r$, e n_j a multiplicidade da raíz $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$, $1 \le j \le s$. Então, uma base do espaço das soluções **reais** da equação (T4.1) é dada por:

$$\mathcal{B} \;=\; \left\{t^l e^{\lambda_j t} : 1 \le j \le r \text{ e } 0 \le l \le m_j{-}1\right\} \bigcup \left\{t^l e^{\alpha_j t}\cos\beta_j\,,\; t^l e^{\alpha_j t}\sin\beta_j : 1 \le j \le r \text{ e } 0 \le l \le n_j{-}1\right\}.$$

Prova:

Pelo Teorema 4(d) e pelo Lema 9, o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base do espaço das soluções complexas da equação (T4.1). Logo, $\mathcal{B}$ é também L.I. sobre $\mathbb{R}$. Ainda, pela Proposição 3 toda solução real é a parte real de uma solução complexa e portanto é uma combinação linear com coeficientes reais de elementos de $\mathcal{B}$ $\blacksquare$

Exemplo 9. Determine a solução geral de

$$y''' - y' = 0\ .$$

Resolução:

O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda^2 - 1) = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 1)$. Pelo Corolário 6, a solução geral (real) é

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 e^t\,, \quad c_1\,,c_2\,,c_3 \in \mathbb{R}\ .$$

Exemplo 10. Determine a solução geral de

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0\ .$$

Resolução:

O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = (\lambda + i)^2(\lambda - i)^2$. Logo, $-i$ e $+i$ são raízes duplas e uma base do espaço das soluções complexas é $\{e^{it}\,,te^{it}\,,e^{-it}\,,te^{-it}\}$. Pelo Corolário 6 uma base do espaço das soluções reais é:

$$\{\cos t\,,\sin t\,,t\cos t\,,t\sin t\}\ ,$$

e a solução geral é

$$x(t) = (A + Bt)\cos t + (C + Dt)\sin t\,, \quad A\,,B\,,C\,,D \in \mathbb{R}\ \blacksquare$$

III.2 - EDOL de Ordem n com Coeficientes Reais e Não Homogênea

Nesta seção reduzimos, sob hipóteses adequadas, a resolução de uma edol com coeficientes reais e não homogênea à resolução de um sistema linear triangular especificado.

Proposição 8. Consideremos a equação diferencial linear ordinária com coeficientes $a_n's$ constantes não todos nulas e um polinômio, $R = R(t)$, $t \in \mathbb{R}$, não nulo,

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \;.....\; + \; a_1 x' + a_0 x \; = \; R(t) \; = \; b_n t^n \; + \; .... \; + \; b_1 t \; + b_0 \; .$$

(a) Se $a_0 \neq 0$, existe solução polinomial Q, grau(Q) = grau(R).

(b) Se $k = max\{i : a_j = 0\,, j \leq i\}$, há solução polinomial $Q = t^{k+1}R_1$, grau(R_1) = grau(R).

Prova

(a) Resolvamos o par de equações

$$Q(t) = c_n t^n + c_{n-1}t^{n-1} + ... + c_2 t^2 + c_1 t + c_0,$$

$$(*) \quad a_0 Q \; + \; a_1 Q' \; + \; a_2 Q'' \; + \; ...... \; + a_j Q^{(j)} \; + \; ..... \; + \; a_{n-1}Q^{(n-1)} \; + \; a_n Q^{(n)} = R,$$

identificando o coeficiente de t^{n-i} nas parcelas $a_j Q^{(j)}$, $j \leq i$, nas demais ele é zero.

Fixada a parcela $a_j Q^{(j)}$, $j \leq i$, um fator do coeficiente surge do trivial cômputo,

$$c_{n-i+j}\frac{d^j}{dt^j}\{\,t^{n-i+j}\} = c_{n-i+j}(n-i+j)(n-i+j-1).....(n-i+1)t^{n-i},$$

e o coeficiente é então $a_j c_{n-i+j}\frac{(n-i+j)!}{(n-i)!}$.

O coeficiente de t^{n-i} em (*) satisfaz, a soma em ordem decrescente em $j = i, i-1, ..., 0$,

$$(i) \qquad a_i c_m \frac{n!}{(n-i)!} \; + \; ...... \; + \; a_j c_{n-i+j}\frac{(n-i+j)!}{(n-i)!} \; + \; ..... \; + \; a_0 c_{n-i} = b_{n-i} \;\; , \; i = 0,\, 1,\, 2 \dots n \; .$$

Pelas expressões (i), $i = 0,\, 1,\, 2 \dots n$, acima obtemos a equação matricial resolúvel,

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ a_1 n & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ a_2\frac{n!}{(n-2)!} & a_1\frac{(n-1)!}{(n-2)!} & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_i\frac{n!}{(n-i)!} & a_{i-1}\frac{(n-1)!}{(n-i)!} & . & a_j\frac{(n-i+j)!}{(n-i)!} & . & . & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & a_0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & a_0 & 0 \\ a_n n! & . & . & . & . & . & . & . & a_2 2! & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_n \\ c_{n-1} \\ c_{n-2} \\ . \\ . \\ . \\ c_{n-i} \\ . \\ c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ . \\ . \\ . \\ b_{n-i} \\ . \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}.$$

(b) A equação é $a_n x^{(n)} \; + \; .... \; + \; a_{k+1}x^{(k+1)} \; = \; R$. Por (a) $a_n y^{(n-k-1)} + ... + a_{k+1}y \; = \; R$, $k+1 \leq n$, têm solução $y(t) = Q(t)$, grau(Q) = grau(R). Integrando $y = y(t)$ $k+1$-vezes, e escolhendo zero para termo independente, obtemos a solução desejada ■

Lema 10. Seja, sobre $C^\infty(\mathbb{R})$,

$$P(\frac{d}{dt}) = a_n\frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + ... + a_2\frac{d^2}{dt^2} + a_1\frac{d}{dt} + a_0 I\,,$$

$a_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq n$, I o operador identidade, $p = p(t)$ o polinômio característico de $P(\frac{d}{dt})$, $Q = Q(t)$ uma função em $C^\infty(\mathbb{R})$ e γ em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Então,

$$P(\frac{d}{dt})\big\{Q(t)e^{\gamma t}\big\} \;=\; \Bigg[\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!}Q^{(n)} \;+\; .... \;+\; \frac{p''(\gamma)}{2!}Q'' \;+\; p'(\gamma)Q' \;+\; p(\gamma)Q\Bigg]e^{\gamma t}\,.$$

Prova:

Computemos

$$\{\,a_n\frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + ... + a_2\frac{d^2}{dt^2} + a_1\frac{d}{dt} + a_0 I\,\}\{\,Q(t)e^{\gamma t}\,\}\,,$$

identificando o coeficiente de $Q^{(i)}$, i fixo. É fácil ver que a i-ésima derivada $Q^{(i)}$ surge somente nas parcelas com coeficiente a_k tais que $k \geq i$. Ainda mais, é evidente que $\frac{d^m}{dt^m}(e^{\gamma t}) = \gamma^m e^{\gamma t}$ e portanto, para cada $k \geq i$,

$$\frac{d^k}{dt^k}\{\,Q(t)e^{\gamma t}\,\} \;=\; \sum_{p=0}^{p=k}\binom{k}{p}Q^{(p)}\frac{d^{k-p}}{dt^{k-p}}\{e^{\gamma t}\} \;=\; \sum_{p=0}^{p=k}\binom{k}{p}Q^{(p)}\gamma^{k-p}e^{\gamma t}\,.$$

Assim, contabilizando as contribuições ao coeficiente de $Q^{(i)}$ obtemos o somatório,

$$\sum_{k=i}^{n} a_k\binom{k}{i}\gamma^{k-i}e^{\gamma t}\,.$$

Considerando agora o polinômio característico

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n \;+\; a_{n-1}\lambda^{n-1} \;+\; a_{n-2}\lambda^{n-2} \;+\; .... \;+\; a_2\lambda^2 + a_1\lambda \;+\; a_0\,,$$

e computando a sua derivada $p^{(i)}$, os monômios λ^m, $m < i$, desaparecem e obtemos,

$$p^{(i)}(\lambda) \;=\; \sum_{k=i}^{n} a_k\,k(k-1).....(k-i+1)\,\lambda^{k-i} = \sum_{k=i}^{n} a_k\frac{k\,!}{(k-i)!}\lambda^{k-i} = i\,!\sum_{k=i}^{n} a_k\binom{k}{i}\lambda^{k-i}\,.$$

Portanto, o coeficiente de $Q^{(i)}$ é

$$\frac{p^{(i)}(\gamma)}{i!}e^{\gamma t}.$$

Logo,

$$P(\frac{d}{dt})\{\,Q(t)e^{\gamma t}\,\} = \sum_{i=0}^{n}\frac{p^{(i)}(\gamma)}{i!}Q^{(i)}(y)e^{\gamma t} \qquad \blacksquare$$

Com a mesma notação acima, seja R um polinômio com coeficientes reais e γ em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Teorema 5. Consideremos a equação

$$(T5.1) \qquad P(\frac{d}{dt})x = R(t)e^{\gamma t} \ .$$

Existe uma solução particular $x_p(t) = Q(t)e^{\gamma t}$, Q um polinômio, de (T5.1) tal que

$$(T5.2) \qquad \frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!}Q^{(n)} \ + \ .... \ + \ \frac{p''(\gamma)}{2!}Q'' \ + \ p'(\gamma)Q' \ + \ p(\gamma)Q = R.$$

(a) Se $\gamma \in \mathbb{R}$, podemos supor Q real e então, $x_p = Q(t)e^{\gamma t}$ é real.

(b) Se $\gamma \notin \mathbb{R}$ então $Q(t)$ têm coeficientes complexos e $z_p(t) = Q(t)e^{\gamma t}$ é solução complexa. Escrevendo $\gamma = \alpha + \beta i$, $x_p = Re\{\, z_p \,\}$ e $y_p = Im\{\, z_p \,\}$ satisfazem

$$P(\frac{d}{dt})x_p = R(t)e^{\alpha t}cos\beta t \quad , \quad P(\frac{d}{dt})y_p = R(t)e^{\alpha t}sen\beta t \ .$$

(c) Se $p(\gamma) \neq 0$ então, grau(Q) = grau(R).

(d) Se γ é raíz de multiplicidade k podemos supor $Q(t) = t^k R_1(t)$, grau(R_1) = grau(R).

Prova:

Notemos que $\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!} = 1$. Pelo Lema 10 uma solução particular $x_p(t) = Q(t)e^{\gamma t}$ satisfaz,

$$P(\frac{d}{dt})\left\{\, Q(t)e^{\gamma t} \,\right\} = \left[\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!}Q^{(n)} \ + \ ...... \ + \ \frac{p''(\gamma)}{2!}Q'' + p'(\gamma)Q' + p(\gamma)Q \ \right] e^{\gamma t} \ = R(t)e^{\gamma t} \ ,$$

donde, obtemos (T5.2).

Pela Proposição 8 existe um polinômio Q resolvendo (T5.2).

(a) e (b): São triviais.

(c) É óbvio, por (T5.2), que se $p(\gamma) \neq 0$ então grau(Q) = grau(R).

(d) Se γ é raíz de multiplicidade k então,

$$\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!}Q^{(n)} \ + \ .... \ + \ \frac{p^{(k)}(\gamma)}{2!}Q^{(k)} \ = R(t),$$

que admite, pela Proposição 8, uma solução polinômial $y = Q^{(k)}$, grau(y) = grau(R). Integrando $y = y(t)$ k-vezes, e escolhendo termos independentes nulos, obtemos uma solução particular $\blacksquare$

Exemplo 11. Resolva a edo

$$x''' - 5x'' + 3x' + 9x = t^5 e^{3t} \ .$$

Resolução:

O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1)$.

A solução geral da edo homogênea associada é $x_h = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} + c_3 e^{-t}$, $c_i's \in \mathbb{R}$.

Pela fórmula (T5.2) existe solução $x_p = Q(t)e^{3t}$ tal que,

$$\frac{p'''(3)}{3!}Q''' + \frac{p''(3)}{2!}Q'' + \frac{p'(3)}{1!}Q' + \frac{p(3)}{0!}Q = t^5 \ .$$

Como $p' = 3\lambda^2 - 10\lambda + 3$, $p'' = 6\lambda - 10$ e $p''' = 6$ temos então, $Q''' + 4Q'' = t^5$.

Pondo $y = Q''$, a edo $y' + 4y = t^5$ têm solução $y = \frac{t^5}{4} + at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$.

Logo,

$$\begin{cases} y' = & 0t^5 + \frac{5}{4}t^4 + 4at^3 + 3bt^2 + 2ct + d \\ 4y = & t^5 + 4at^4 + 4bt^3 + 4ct^2 + 4dt + 4e \\ y' + 4y = & t^5 \, , \end{cases}$$

e então, $a = -\frac{5}{16}$, $b = \frac{5}{16}$, $c = -\frac{15}{64}$, $d = \frac{15}{128}$ e, ainda, $e = -\frac{15}{512}$.

Assim,

$$y = \frac{t^5}{4} - \frac{5t^4}{16} + \frac{5t^3}{16} - \frac{15t^2}{64} + \frac{15t}{128} - \frac{15}{512} \, ,$$

$$Q' = \frac{t^6}{24} - \frac{t^5}{16} + \frac{5t^4}{64} - \frac{5t^3}{64} + \frac{15t^2}{256} - \frac{15t}{512}$$

e, finalmente,

$$Q = \frac{t^7}{168} - \frac{t^6}{96} + \frac{t^5}{64} - \frac{5t^4}{256} + \frac{5t^3}{256} - \frac{15t^2}{1024} \ .$$

A solução geral é,

$$x_g = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} + c_3 e^{-t} + (\frac{t^7}{168} - \frac{t^6}{96} + \frac{t^5}{64} - \frac{5t^4}{256} + \frac{5t^3}{256} - \frac{15t^2}{1024})e^{3t} \, , \quad c_i's \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

Exemplo 12. Resolva a edo

$$x'' + 2x' + 2x = e^{\alpha t} sen\beta t \, , \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Resolução:

O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = (\lambda + 1)^2 + 1$, com raízes $\lambda = -1 \pm i$.

A solução geral da edo homogênea associada é $x_h = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} sen\, t$, $\quad c_1 \, , c_2 \in \mathbb{R}$.

Se $\beta = 0$ a edo é homogênea e a solução geral é a geral da equação homogênea.

Se $\beta \neq 0$, como $e^{\alpha t} sen \beta t = Im\{ e^{(\alpha + i\beta)t} \}$ e o problema é em $\mathbb{R}$, a parte imaginária de uma solução da edo complexa $x'' + 2x' + 2x = e^{\gamma t}$, $\gamma = \alpha + i\beta$, é solução da edo dada.

Para uma solução $z_p(t) = Q(t)e^{\gamma t}$ da edo complexa, $Q = Q(t)$ satisfaz,

$$(A) \quad \frac{p''(\gamma)}{2!}Q'' + \frac{p'(\gamma)}{1!}Q' + \frac{p(\gamma)}{0!}Q \;=\; Q'' + p'(\gamma)Q' + p(\gamma)Q \;=\; 1\ .$$

Caso 1: $\gamma \neq -1 \pm i$ (γ não é raíz característica).

Então, $Q(t) = \frac{1}{p(\gamma)}$ resolve (A), $z_p = \frac{\overline{p(\gamma)}}{|p(\gamma)|^2}e^{\gamma t}$ a edo complexa e $x_p \;=\; \frac{1}{|p(\gamma)|^2}Im\{ p(\overline{\gamma})e^{\gamma t} \}$ a edo dada. A solução geral é,

$$x_g \;=\; c_1 e^{-t}\cos t \;+\; c_2 e^{-t} sen\, t \;+\; \frac{1}{|p(\gamma)|^2} Im\{ p(\overline{\gamma})e^{\gamma t} \}\,, \quad c_1\,, c_2 \in \mathbb{R}\ .$$

Caso 2: $\gamma = -1 + i$. Escrevemos (A) como $Q'' \;+\; 2iQ' = 1$, com solução $Q' = \frac{1}{2i}$ e $Q = -\frac{t}{2}\, i$.

Logo, $z_p = Q(t)e^{\gamma t} = -\frac{t}{2}e^{-t}\, i\, e^{it}$ e $x_p(t) = Im\{ z_p(t) \} = -\frac{t}{2}e^{-t}\cos t$. A solução geral é,

$$x_g \;=\; c_1 e^{-t}\cos t \;+\; c_2 e^{-t} sen\, t \;-\; \frac{t}{2}e^{-t}\cos t\,, \quad c_1\,, c_2 \in \mathbb{R}\ .$$

Caso 3: $\gamma = -1 - i$. A solução é: $x_g \;=\; c_1 e^{-t}\cos t \;+\; c_2 e^{-t} sen\, t \;+\; \frac{t}{2}e^{-t}\cos t\,, \quad c_1\,, c_2 \in \mathbb{R}$ ∎